

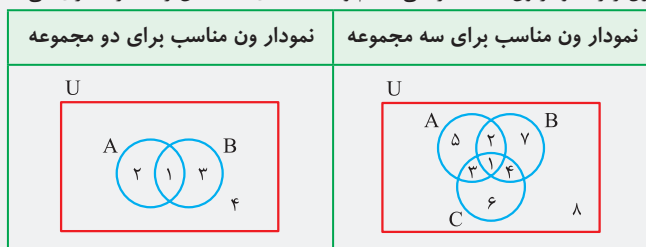
۱۴۰۴ نوبت دوم داخل

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۷	۱۷	۱۲	۴	۴	۲۴	۱۲
فیزیک	۹	۱۰	۱۶	۰	۱۵	۱۷	۳
شیمی	۹	۸	۱۰	۳	۶	۱۷	۷

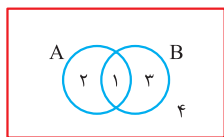
گزینه ۳ - ۳

درس نامه بعضی وقت‌ها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً) طولانی به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است). برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً ۲ تا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر، نمودار ون مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره‌گذاری می‌کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم. مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A، مجموعه {۱، ۲، ۳، ۵} و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A، {۱، ۲} را می‌نویسیم.



گام ۳ عبارت داده‌شده شامل دو مجموعه A و B است؛ پس طبق درس‌نامه نمودار ون را به این صورت می‌کشیم. با توجه به نمودار می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \diamond A' \cap B &= \{3, 4\} \cap \{1, 3\} = \{3\} \\ \diamond A \cup B &= \{1, 2, 3\} \\ \diamond (B \cap A) - B' &= \{1\} - \{2, 4\} = \{1\} \\ M &= (A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A) \\ M &= \{3\} \cup \underbrace{\{1\} \cap \{1, 2, 3\}}_{\{1\}} = \{1, 3\} \end{aligned}$$

جای‌گذاری می‌کنیم:
طبق نمودار بالا {۱، ۳} همان B است.

گزینه ۴ - ۴

درس نامه ۱ هم‌ارزی‌های زیر را بلد باشید:

$\square \Rightarrow \square \equiv \sim \square \vee \square$	تبدیل « $\Rightarrow$ » به « $\vee$ »
$\sim (\square \vee \square) \equiv \sim \square \wedge \sim \square$ و $\sim (\square \wedge \square) \equiv \sim \square \vee \sim \square$	دمورگان
$\square \vee \square \equiv \square \vee \square$ و $\square \wedge \square \equiv \square \wedge \square$	جابه‌جایی

۲ جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ (همون اگر p، آنگاه q) و $p \vee q$ (همون p یا q) به صورت زیر است. با توجه به جدول می‌توانیم بگوییم گزاره‌های به فرم $\square \Rightarrow \square$ ن همیشه درست‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	ن

ریاضیات

گزینه ۲ و ۳ - ۱

درس نامه به دنباله‌ای که جمله اولش غیر صفر باشد و هر جمله‌اش (به غیر از اولی) از ضرب جمله قبل از خودش در یک عدد غیر صفر به دست می‌آید، دنباله هندسی می‌گوییم.

گام ۱ دنباله‌ها را با توجه به رفتارشان ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \diamond a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \dots & \quad \diamond a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \dots \\ & \quad \times a \quad \times a \quad \times \frac{1}{a} \quad \times \frac{1}{a} \\ \diamond a^2, a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \dots & \quad \diamond 1, a, a^2, a^3, a^4, \dots \\ & \quad \times \frac{1}{a} \quad \times \frac{1}{a} \quad \times a \quad \times a \end{aligned}$$

گام ۲ در تمام گزینه‌ها هر جمله از ضرب جمله قبلی‌اش در یک عدد ثابت به دست می‌آید؛ پس باید شرط دوم، یعنی صفر نبودن جمله اول را بررسی کنیم. **۱** و **۴** همواره هندسی نیستند، چون در حالتی که $a = 0$ باشد، جمله اولشان صفر می‌شود، اما **۲** و **۳** به خاطر وجود $\frac{1}{a}$ و حقیقی بودن جملات، $a \neq 0$ می‌شود؛ پس در این گزینه‌ها شرط صفر نبودن جمله اول هم برقرار است. در نتیجه **۲** و **۳** جواب‌اند ولی متأسفانه سازمان سنجش فقط **۲** را به عنوان جواب اعلام کرده است!

گزینه ۴ - ۲

درس نامه اتحاد مربع و مکعب دوجمله‌ای را بلد باشید:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{و} \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

گام ۱ صورت و مخرج کسر داده‌شده را جداگانه ساده می‌کنیم:

صورت: از ۳ فاکتور بگیریم می‌توانیم از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده کنیم:

$$24x^3 + 36x^2 + 18x + 3 = 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 3(2x + 1)^3$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

مخرج:

گام ۲ حالا می‌توانیم کسر داده‌شده را ساده‌تر بنویسیم:

$$A = \frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2} = \frac{3(2x + 1)^3}{(2x + 1)^4} = \frac{3}{2x + 1} \quad (*)$$

گام ۳ به گفته سؤال $x^2 + x = 1$ است. از این تساوی $2x + 1$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + x = 1 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 + 4x = 4 \xrightarrow{+1} 4x^2 + 4x + 1 = 5$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\quad}} 2x + 1 = \pm \sqrt{5}$$

سؤال می‌گوید x مثبت است؛ پس $2x + 1 = \sqrt{5}$ را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \sqrt{5} = \frac{3}{5} \sqrt{5}$$



گام ۷ طبق «شفاف سازی» به دنبال $|f(0)|$ هستیم که می شود:

$$|f(0)| = \left| -\frac{1}{\lambda}(-5)^2 + 3 \right| = \left| -\frac{25}{\lambda} + 3 \right| = \left| -\frac{1}{\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda}$$

۶- گزینه ۱

درس نامه ۱ در دنیای لگاریتم ها، قوانین زیر برقرارند:

الف) اگر $\log_a b = c$ باشد، می توانیم بنویسیم:

$$a^c = b$$

پس $\log_a a = 1$ می شود.

ب) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان به این صورت انجام می شود:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad \text{و} \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

پ) لگاریتم، توان روی عبارت جلوی را به عنوان ضریب به پشت خودش می برد؛ یعنی:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

ت) لگاریتم، معکوس توان روی مبنای را به عنوان ضریب به پشت خودش می برد؛ یعنی:

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

ث) ترکیب دو قانون قبلی، این جوری می شود:

ج) در عبارت هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن ها عدد به توان لگاریتم می رسد، می توانیم جای

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

a و c را عوض کنیم:

چ) اگر جای عدد و مبنای را عوض کنیم، لگاریتم معکوس می شود؛ یعنی:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

۲) جمع و ضرب ریشه های معادله درجه دوم $Ax^2 + Bx + C = 0$ با شرط $\Delta > 0$ از رابطه های زیر محاسبه می شوند:

$$\text{ضرب: } P = \frac{C}{A} \quad \text{و} \quad \text{جمع: } S = -\frac{B}{A}$$

۳) اگر B ، واسطه حسابی A و C باشد، می توانیم بنویسیم:

$$B = \frac{A+C}{2} \quad \text{یا} \quad 2B = A+C$$

گام ۸ به گفته سؤال:

عکس مجموع ریشه های معادله $\frac{-4a}{A}x^2 + \frac{b}{B}x + \frac{1}{C} = 0$ برابر $\log 4$ است؛ پس طبق

مورد (۲) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{S} = \log 4 \Rightarrow \frac{1}{-\frac{B}{A}} = \log 4 \Rightarrow -\frac{A}{B} = \log 4$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (۱-پ) درس نامه}} -\frac{4a}{b} = \log 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \log_2 2$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (۱-پ) درس نامه}} \frac{a}{b} = \log_2 2 = \log_{100} 2 \quad (1)$$

♦ a واسطه حسابی b و c است؛ پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$2a = b + c \quad (2)$$

گام ۹ به دنبال $M = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^a$ هستیم؛ پس طرفین تساوی (۲) را بر a تقسیم می کنیم

تا $\frac{c}{a}$ ظاهر بشود:

$$\frac{2a}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 2 - \frac{b}{a} \quad (3)$$

طرفین تساوی (۱) را به کمک مورد (۱-چ) درس نامه معکوس می کنیم تا به $\frac{b}{a}$ برسیم:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\log_{100} 2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \log_{2100} 100$$

گام ۶ به کمک مورد (۱) درس نامه « $\Rightarrow$ » را به « $\vee$ » تبدیل می کنیم:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r$$

گام ۷ طبق هم ارزی دموگان، $\sim (p \wedge q)$ همان $\sim p \vee \sim q$ است:

$$\sim (p \wedge q) \vee r \equiv \underbrace{\sim p \vee \sim q \vee r}_{*}$$

گام ۸ حالا گزینه ها را بررسی می کنیم:

① باز هم اول « $\Rightarrow$ » را به « $\vee$ » تبدیل می کنیم:

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \equiv \sim p \vee (\sim (\sim r) \vee \sim q) \equiv \sim p \vee r \vee \sim q \equiv \underbrace{\sim p \vee \sim q \vee r}_{**}$$

*** و * دقیقاً مثل هم اند؛ پس همین ① جواب است.

تیزبازی اگر p و q درست و r نادرست باشد، ارزش $(p \wedge q) \Rightarrow r$ می شود:

$$(د \wedge د) \Rightarrow ن \equiv ن$$

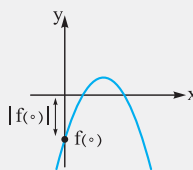
پس گزینه ای جواب است که با شرایط بالا ارزشش نادرست باشد. فقط ① این جوری است، ببینید:

$$p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \equiv د \Rightarrow (د \Rightarrow ن) \equiv ن$$

۵- گزینه ۳

شفاف سازی «فاصله نقطه برخورد سهمی با محور عرض ها»:

طبق شکل مقابل همان $|f(0)|$ است.



درس نامه ۱ در شکل مقابل، دو نقطه A و B با عرض

یکسان روی سهمی قرار دارند. میانگین طول این دو نقطه، طول رأس

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

سهمی را می دهد؛ یعنی:

۲) اگر مختصات رأس یک سهمی به صورت $S(h, k)$ باشد، ضابطه اش را می توانیم به این

$$y = a(x - h)^2 + k$$

صورت بنویسیم:

۳) برای این که بفهمیم تابع $f(x)$ محور y ها را با چه عرضی قطع می کند، باید $f(0)$ را حساب کنیم.

گام ۶ به گفته سؤال $A(2a+3, a-2)$ و $B(7-2a, a-2)$ دو نقطه با مؤلفه های

طبیعی هستند؛ پس a عددی طبیعی و طول و عرض این نقاط مثبت اند:

$$\begin{cases} 2a+3 > 0 \Rightarrow 2a > -3 \Rightarrow a > -1.5 \\ 7-2a > 0 \Rightarrow 2a < 7 \Rightarrow a < 3.5 \\ a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2 < a < 3.5 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 3$$

پس مختصات A و B به این صورت می شود:

$$A(9, 1), B(1, 1)$$

گام ۷ نقاط $A(9, 1)$ و $B(1, 1)$ که عرض یکسانی دارند، روی سهمی اند؛ پس طبق مورد (۱)

درس نامه، میانگین طول این نقاط، طول رأس سهمی را می دهد:

$$x_S = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$x_S = 5$$

به گفته سؤال مختصات رأس به صورت $S(b, b-2)$ است؛ پس $b = 5$ و در نتیجه

$$S(5, 5-2) = (5, 3)$$

مختصات رأس می شود:

گام ۸ الان طبق مورد (۲) درس نامه می توانیم ضابطه سهمی را به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = m(x-5)^2 + 3$$

نقطه $B(1, 1)$ روی سهمی قرار دارد؛ پس باید در ضابطه اش صدق کند:

$$1 = m(1-5)^2 + 3 \Rightarrow 16m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + 3$$

پس $f(x)$ می شود:

طبق جدول، در حالت‌های (۱) و (۲) نمودارها به هیچ عنوان نمی‌توانند در ۳ نقطه همدیگر را قطع کنند، ولی در حالت (۳) دو نمودار دقیقاً در ۳ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؛ پس A و S باید بر هم منطبق باشند:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1-4a}{4}\right) \Rightarrow -\frac{1-4a}{4} = 0 \Rightarrow 1-4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

حالا باید ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ $|4x-2| = x^2 - x + a$ را به ازای $a = \frac{1}{4}$ به دست بیاوریم. طبق شکل حالت (۳) در جدول، ریشهٔ بزرگ‌تر، $x > \frac{1}{2}$ است؛ پس در (*):

$$4x-2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \Rightarrow 4x - \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 - 4(x - \frac{1}{4}) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4} - 4) = 0 \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} x = 4/5$$

۸- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌شود $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع، هر ارتفاع، میانه و نیمساز هم هست.

گام ۱ فرض می‌کنیم شعاع نیم‌دایرهٔ مقابل r باشد. به گفتهٔ سؤال $SP = r$ است؛ پس اگر شعاع OS را به شکل اضافه کنیم، مثلی به اسم OSP ساخته می‌شود که طول هر ضلعش برابر r است؛ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

گام ۲ طبق شکل بالا، طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۳ است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

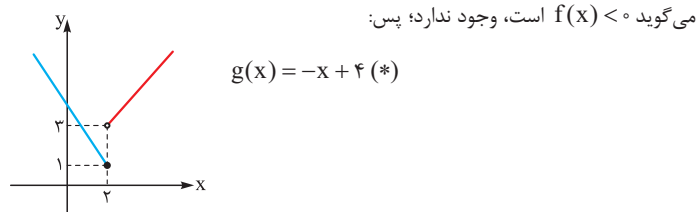
از طرفی طبق مورد (۲) درس‌نامه، ارتفاع SH، میانه هم هست؛ پس H وسط OP است. در نتیجه:

$$OH = a = \frac{r}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

۹- گزینه ۲

گام ۱ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ -3x+7 & x \leq 2 \end{cases}$ را می‌کشیم تا بفهمیم کجا $f(x) \geq 0$ است و کجاها $f(x) < 0$.

طبق شکل $f(x)$ همیشه مثبت است؛ پس ضابطهٔ دوم. $g(x) = \begin{cases} -x+4 & f(x) \geq 0 \\ x-4 & f(x) < 0 \end{cases}$ که می‌گوید $f(x) < 0$ است، وجود ندارد؛ پس:



گام ۲ برای محاسبهٔ $f(g(-4))$ اول باید به کمک (*)، $g(-4)$ را حساب کنیم:

$$g(-4) = -(-4) + 4 = 8$$

برای محاسبهٔ $f(g(-4)) = f(8)$ هم از ضابطهٔ بالایی f، یعنی $f(x) = x+1$ استفاده می‌کنیم:

$$f(8) = 8+1 = 9$$

تساوی بالا را در (۳) جای‌گذاری می‌کنیم، جای ۲ هم طبق مورد (۱-پ) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم $\log_2 2^2 = \log_2 4$:

$$\frac{c}{a} = 2 - \log_2 100 = \log_2 4 - \log_2 100$$

$$\xrightarrow{\text{مورد (۱-ب) درس‌نامه}} \frac{c}{a} = \log_2 \frac{4}{100} = \log_2 \frac{1}{25} \quad (۴)$$

گام ۲ درخواست سؤال $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{-\frac{1}{3}}$ است؛ پس:

$$M = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{c}{a}} = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{c}{a}} = 2^{-\frac{1}{3} \times \frac{c}{a}} \xrightarrow{(۴)} 2^{-\frac{1}{3} \times \log_2 \frac{1}{25}} \xrightarrow{\text{مورد (۱-ب) درس‌نامه}} 2^{\log_2 \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

همان $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = 5^{-\frac{2}{3}}$ است؛ پس M می‌شود:

$$M = 2^{\log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{25}}} \xrightarrow{\text{مورد (۱-ج) درس‌نامه}} (\sqrt[3]{\frac{1}{25}})^{\log_2 2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$$

۷- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ تعداد نقاط برخورد نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ همان تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g(x)$ است.

۲ اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، در این صورت:
 برای رسم نمودار تابع $f(x) + a$ ، نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به سمت بالا می‌بریم. ($a > 0$)

برای رسم نمودار تابع $f(x) - a$ ، نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به سمت پایین می‌بریم. ($a > 0$)

۳ نمودار توابع به فرم $y = |a_1x + b_1| + |a_2x + b_2| + \dots + |a_nx + b_n|$ در ریشهٔ

داخل قدرمطلق‌ها، یعنی $x = -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}$ شکستگی دارد؛ بنابراین مختصات نقاط شکستگی نمودار این تابع به صورت زیرند:

$$A_1\left(-\frac{b_1}{a_1}, f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)\right), A_2\left(-\frac{b_2}{a_2}, f\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)\right), \dots, A_n\left(-\frac{b_n}{a_n}, f\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)\right)$$

۴ مختصات رأس سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ به صورت $S\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{\Delta}{4A}\right)$ است.

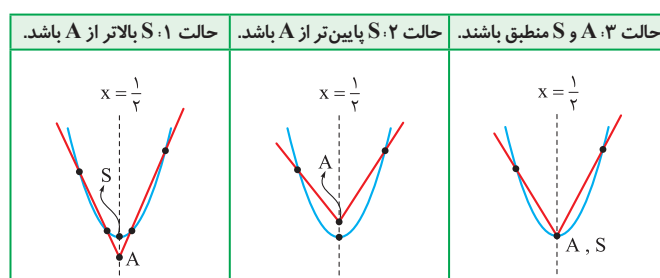
گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، معادلهٔ $|4x-2| = x^2 - x + a$ وقتی ۳ تا جواب دارد که نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ در ۳ نقطه همدیگر را قطع کنند. به کمک مورد (۳) درس‌نامه، مختصات نقطهٔ شکستگی نمودار تابع $f(x) = |4x-2|$ را به دست می‌آوریم:

$$A\left(\frac{2}{4}, f\left(\frac{2}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

حالا به کمک مورد (۴) درس‌نامه، مختصات رأس سهمی $g(x) = \frac{1}{A}x^2 - \frac{1}{B}x + \frac{a}{C}$ را به دست می‌آوریم:

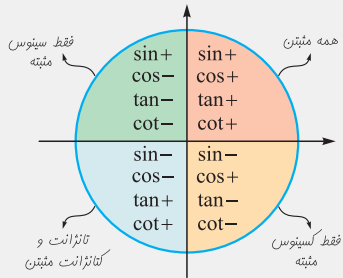
$$S\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{\Delta}{4A}\right) = \left(-\frac{-1}{2(1)}, -\frac{(-1)^2 - 4(1)(a)}{4(1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1-4a}{4}\right)$$

گام ۲ بنابراین A و S هر دو روی خط $x = \frac{1}{2}$ قرار دارند و نمودارشان ۳ حالت دارد:



۱۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف دستگاه مختصات این طوری است:



۲ اتحادهای مثلثاتی زیر را بلد باشید:

$$\diamond \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\diamond \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\diamond \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ یا } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ یا } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\diamond 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\diamond 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۳ نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه به صورت زیرند:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس‌نامه، جای $\tan \alpha$ و $1 + \cot^2 \alpha$ به ترتیب می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ و } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$M = (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) = (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$= (1 + \cos \alpha) \left(\frac{1}{|\sin \alpha|} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

گام ۲ به گفته سؤال α در ناحیه چهارم است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه $\sin \alpha$ منفی می‌شود؛ بنابراین در تساوی بالا به جای $|\sin \alpha|$ می‌نویسیم $-\sin \alpha$:

$$M = (1 + \cos \alpha) \left(-\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{(\cos \alpha + 1)(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، $\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ همان $-(1 - \cos^2 \alpha)$ است؛ پس M

$$M = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha$$
 می‌شود.

تیزبازی بیا ببینیم به جای α بگذاریم -6° که در ناحیه چهارم قرار دارد:

$$M = (1 + \cos \alpha) \left(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right)$$

$$= (1 + \cos(-6^\circ)) \left(\sqrt{1 + \cot^2(-6^\circ)} + \frac{1}{\tan(-6^\circ)} \right)$$

طبق مورد (۳) درس‌نامه $\cos(-6^\circ) = \frac{1}{2}$ ، $\cot(-6^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\tan(-6^\circ) = -\sqrt{3}$ است؛ پس:

$$M = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تنها عبارتی که به ازای $\alpha = -6^\circ$ می‌دهد: $-\sin \alpha$ در (۴) است، ببینید:

$$-\sin(-6^\circ) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \checkmark$$

۱۰- گزینه ۴

شفاف‌سازی منظور طراح از جمله «f در یک همسایگی از a وارون پذیر است» این است که f اکیداً صعودی و در نتیجه وارون پذیر است.

درس نامه ۱ اگر نقطه (a, b) روی تابع وارون پذیر f باشد، نقطه (b, a) روی

$$f^{-1} \text{ قرار دارد و برعکس؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم: } f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

۲ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، برای پیدا کردن طول نقاط برخورد تابع f با وارونش باید معادله $f(x) = x$ را حل کنیم. این یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد، می‌توانیم به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ ، معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.

گام ۱ به گفته سؤال f تابعی وارون پذیر است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه از تساوی $f^{-1}(a) = f(a)$ نتیجه می‌گیریم که:

گام ۲ f اکیداً صعودی است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، می‌توانیم به جای حل معادله بالا، معادله $f(a) = a$ را حل کنیم. حالا با توجه به این که $f(x) = 6x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1$ است، معادله $f(a) = a$ را می‌سازیم:

$$6a - a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 1 = a \Rightarrow (\Delta a + 1) + (-a\sqrt{a} - 2\sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(a+2) - \sqrt{a}(a+2) = 0 \Rightarrow (a+2)(\Delta - \sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ \Delta - \sqrt{a}=0 \Rightarrow \sqrt{a}=\Delta \xrightarrow{\text{توان}} a=25 \end{cases}$$

به خاطر وجود $\sqrt{x}$ در $f(x)$ ، باید $a \geq 0$ باشد؛ پس $a = 25$ را می‌پذیریم.

گام ۳ به دنبال $f(a-9)$ به ازای $a = 25$ هستیم که می‌شود:

$$f(25-9) = f(16) = 6(16) - 16\sqrt{16} - 2\sqrt{16} + 1 = 96 - 64 - 8 + 1 = 34$$

۱۱- گزینه ۱

درس نامه ۱ ریشه عبارت جلوی لگاریتم، معادله مجانب قائم را می‌دهد. مثلاً معادله مجانب قائم تابع $y = -3 \log(x-1)$ به صورت $x = 1$ است.

۲ برای به دست آوردن $f^{-1}(\alpha)$ ، بدون به دست آوردن f^{-1} ، اول فرض می‌کنیم $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

حالا با حل معادله بالا، β را به دست می‌آوریم.

گام ۱ در شکل مقابل، $x = -\frac{1}{p}$ ، مجانب قائم تابع

$$f(x) = \log_p(ax+b) \text{ است؛ پس طبق مورد (۱)}$$

درس‌نامه، $x = -\frac{1}{p}$ باید ریشه عبارت $ax+b$ باشد:

$$-\frac{1}{p}a + b = 0 \quad (۱)$$

گام ۲ طبق شکل بالا، نقطه $A(4, 2)$ روی نمودار قرار دارد؛ پس $f(4) = 2$ می‌شود:

$$f(x) = \log_p(ax+b) \Rightarrow 2 = \log_p(4a+b) \Rightarrow 4a+b = 3^2 = 9 \quad (۲)$$

گام ۳ دستگاه حاصل از (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -\frac{1}{p}a + b = 0 \\ 4a + b = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی-پایینی}} 4/5a = 9 \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در بالایی}} -\frac{1}{p}(2) + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

پس $f(x) = \log_p(2x+1)$ (*) به این صورت می‌شود:

گام ۴ به دنبال $f^{-1}(-2)$ هستیم؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، فرض می‌کنیم

$$f^{-1}(-2) = \alpha$$
 باشد، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$f(\alpha) = -2 \xrightarrow{(*)} \log_p(2\alpha+1) = -2 \Rightarrow 2\alpha+1 = 3^{-2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9} \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{9}$$

$\alpha = -\frac{4}{9}$ شد؛ پس طبق (**), $f^{-1}(-2) = -\frac{4}{9}$ می‌شود.

گام ۳ به کمک درس نامه، نسبت ها را ساده تر می نویسیم:

$$\diamond \cos(21^\circ) = \cos(27^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ناحیه ۳: $\cos < 0$

$$\diamond \sin(243^\circ) = \sin(27^\circ - 27^\circ) = -\cos(27^\circ)$$

ناحیه ۳: $\sin < 0$

$$\diamond \sin(135^\circ) = \sin(18^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ناحیه ۲: $\sin > 0$

$$\diamond \cos(153^\circ) = \cos(18^\circ - 27^\circ) = -\cos 27^\circ$$

ناحیه ۳: $\cos < 0$

گام ۳ حالا موارد بالا را در $A = \sqrt{2} \cos(21^\circ) \sin(243^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(153^\circ)$

$$A = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-\cos 27^\circ) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (-\cos 27^\circ)$$

$$= \frac{3}{2} \cos 27^\circ + \cos 27^\circ = \frac{5}{2} \cos 27^\circ$$

۱۵- گزینه ۳

درس نامه ۱ $\sin$ و $\tan$ مضارب صحیح π و همین طور $\cos$ و $\cot$ مضارب $\frac{\pi}{2}$ ، همگی برابر صفرند.

۲) فرم کلی جواب های معادله $\tan \hat{A} = \tan \hat{B}$ به صورت $\hat{A} = k\pi + \hat{B}$ است.

گام ۳ طبق مورد (۱) درس نامه، $\tan \Delta \pi = 0$ است؛ پس می توانیم بنویسیم:

$$\tan 2x + \tan 3x = \tan \pi \Rightarrow \tan 2x = -\tan 3x \quad (*)$$

گام ۳ اول نکته زیر را بخوانید:

☆ نکته برای برداشتن منفی از پشت تانژانت، از تساوی زیر استفاده می کنیم:

$$-\tan x = \tan(\pi - x)$$

طبق نکته بالا به جای $-\tan 3x$ در (*) می توانیم بنویسیم $\tan(\pi - 3x)$:

$$\tan 2x = \tan(\pi - 3x)$$

گام ۳ حالا به کمک مورد (۲) درس نامه، معادله بالا را حل می کنیم:

$$2x = k\pi + (\pi - 3x) \Rightarrow \Delta x = (k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{k+1}{\Delta} \pi$$

$$\frac{x \in (0, \pi)}{k=0,1,2,3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$$

پس معادله ۴ جواب دارد.

۱۶- گزینه ۳

گام ۳ به جای $\sqrt{x^2 - 9a^2}$ می نویسیم $\sqrt{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{(x-3a)} \cdot \sqrt{(x+3a)}$ همان $3\sqrt{3a}$ است:

$$M = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{2\sqrt{a}}}{\sqrt{x^2-9a^2}} = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{3a}}{\sqrt{x-3a} \cdot \sqrt{x+3a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{2\sqrt{x-3a}}{\sqrt{x-3a} \cdot \sqrt{x+3a}} + \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a} \cdot \sqrt{x+3a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6a}} + \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x-3a} \cdot \sqrt{x+3a}} \quad (*)$$

۱۳- گزینه ۱

درس نامه $\tan(\alpha \pm \beta)$ را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{و} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

گام ۳ فرض می کنیم $\hat{A} = \alpha + 12^\circ$ و $\hat{B} = 18^\circ - \alpha$ باشد. زاویه معروفی می شود، ببینیم:

گام ۳ حالا به کمک درس نامه $\tan(\hat{A} + \hat{B})$ را بسط می دهیم:

$$\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \tan \hat{B}}$$

به گفته سؤال $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ است. این مقدار را در تساوی بالا جای گذاری می کنیم:

$$\tan 3^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \tan \hat{B}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \tan \hat{B}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \tan \hat{B} \right) \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B} = \frac{3}{4} + \sqrt{3} \tan \hat{B}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \tan \hat{B} + \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B} = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B} = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \quad (*)$$

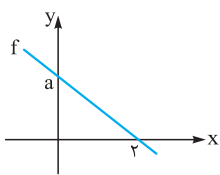
گام ۳ به دنبال $\cot(18^\circ - \alpha)$ هستیم که می شود: $\cot \hat{B} = \frac{1}{\tan \hat{B}} = 5\sqrt{3}$

۱۴- گزینه ۲

درس نامه برای ساده کردن نسبت های مثلثاتی به فرم $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

جدول زیر توجه کنید:

فرم زاویه	روش ساده کردن
$k\pi \pm \alpha$ عدد صحیح	گام ۳ $k\pi$ را به همراه $\pm$ بعدش حذف می کنیم و فقط نسبت مثلثاتی α را می نویسیم. در سمت چپ نسبت جدید یک دایره توخالی هم می گذاریم. مثلاً برای $\cos(11\pi - \alpha)$ داریم: $\cos(\boxed{11\pi} - \alpha) = \cos \alpha$
$\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ عدد فرد	گام ۳ حالا باید ببینیم $k\pi \pm \alpha$ در کدام ناحیه قرار دارد تا علامت نسبت مثلثاتی اش مشخص شود. این علامت را در دایره توخالی می نویسیم. مثلاً در نسبت بالا $11\pi - \alpha$ در ناحیه دوم قابل حذف مثلثاتی است $(\pi - \alpha)$ زاویه ای در ربع ۲ است و کسینوس در این ناحیه منفی است؛ پس در دایره توخالی منفی قرار می دهیم: $\cos(\boxed{11\pi} - \alpha) = -\cos \alpha$
$\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ عدد فرد	همان کارهایی که برای « $k\pi \pm \alpha$ » انجام دادیم، این جا هم انجام می دهیم. با این تفاوت که در گام ۱ نسبت مثلثاتی را تغییر می دهیم؛ یعنی $\sin$ و $\cos$ و همین طور $\tan$ و $\cot$ را به همدیگر تبدیل می کنیم: $\tan(\boxed{11\pi} - \alpha) = -\cot \alpha$ از زاویه $\alpha - \frac{11\pi}{2}$ مضارب 2π را حذف کنیم به $\frac{4\pi}{2} - \alpha$ هدف



$$\frac{x}{2/a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow \frac{y}{a} = 1 - \frac{x}{2/a} \Rightarrow y = a - \frac{a}{2/a}x \text{ یا } f(x) = a - \frac{a}{2/a}x \quad (1)$$

حالا به کمک مورد (۱) درس نامه، f^{-1} را به دست می آوریم:

$$y = a - \frac{a}{2/a}x \xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای } x, y \text{ را}} x = a - \frac{a}{2/a}y \xrightarrow[\text{می کنیم}]{\text{y را تنها}} \frac{a}{2/a}y = a - x$$

$$\Rightarrow y = 2 - \frac{2}{a}x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \frac{2}{a}x \quad (2)$$

حالا موارد (۱) و (۲) را در تساوی $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ جای گذاری می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|2(a - \frac{a}{2/a}x) - a(2 - \frac{2}{a}x)|} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|(2a - ax) - (2a - 2x)|} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|(2-a)x|} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|2-a||x|} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|2-a||x|} = 2$$

در حد بالا صورت و مخرج هر دو از درجه ۱ هستند؛ پس طبق هم ارزی پرتوان در

$$\text{تساوی بالا،} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{a}x}{|2-a||x|} = \frac{2}{|2-a|} \text{ می شود:}$$

$$\frac{2}{|2-a|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a} = |2-a| \Rightarrow a|2-a| = 1$$

معادله بالا را در دو حالت حل می کنیم:

♦ $a < 2$ باشد: در این حالت $2-a > 0$ است؛ پس:

$$a|2-a| = 1 \Rightarrow a(2-a) = 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

ولی ما به دنبال مقدار غیر صحیح a هستیم؛ پس سراغ حالت دوم می رویم:

♦ $a \geq 2$ باشد: در این حالت $2-a \leq 0$ است؛ پس:

$$a|2-a| = 1 \Rightarrow -a(2-a) = 1 \Rightarrow a^2 - 2a = 1 \xrightarrow{+1} a^2 - 2a + 1 = 2$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 2 \Rightarrow a-1 = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{a \geq 2} a = 1 + \sqrt{2}$$

گزینه ۴ - ۱۹

درس نامه ۱ تابع f در $x = a$ به شرطی پیوسته است که حد چپ، حد راست و

مقدارش در $x = a$ برابر باشند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

روش روسی برای حل معادله درجه دوم: برای به دست آوردن ریشه های معادله درجه دومی

مثل $ax^2 + bx + c = 0$ که ضریب x^2 برابر ۱ نیست (و با تجزیه به راحتی حل نمی شود)

می توانیم از این تکنیک استفاده کنیم که ابتدا a را در C ضرب کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱

شود؛ یعنی:

$$\text{ضرب} \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + bx + ac = 0$$

حالا باید ریشه های معادله $x^2 + bx + ac = 0$ را با تجزیه به دست آوریم و هر دو ریشه

به دست آمده را تقسیم بر a کنیم تا ریشه های معادله اصلی، یعنی $ax^2 + bx + c = 0$ به

دست آیند.

گام ۳ برای محاسبه $(*)$ ، صورت و مخرج را در مزدوج $\sqrt{x} - \sqrt{3a}$ ، یعنی $\sqrt{x} + \sqrt{3a}$ ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3(\sqrt{x} - \sqrt{3a})}{\sqrt{x - 3a} \cdot \sqrt{x + 3a}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3a}}{\sqrt{x} + \sqrt{3a}} = \lim_{x \rightarrow 3a^+} \frac{3(x - 3a)}{\sqrt{x - 3a} \cdot \sqrt{x + 3a}} \times \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3a}} = \frac{3 \times 0}{\dots} = 0$$

گام ۴ حالا به جای $(*)$ ، صفر می گذاریم:

$$M = \frac{2}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{4}{6a}} = \sqrt{\frac{2}{3a}}$$

گزینه ۱ - ۱۷

درس نامه ۱ در مورد حد بی نهایت، رابطه های زیر را بلد باشید:

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

۲ اگر سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ در $x = \alpha$ بر محور x ها مماس باشد، می توانیم ضابطه اش را به صورت مقابل بنویسیم:

$$y = A(x - \alpha)^2$$

گام ۳ به گفته سوال، $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ است.

این یعنی هم در حالتی که $x \rightarrow (\sqrt[3]{4})^+$ و هم در حالتی که $x \rightarrow (\sqrt[3]{4})^-$ با کسری به فرم $\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}$ طرف هستیم؛ پس مخرج که یک سهمی است، باید به شکل مقابل باشد.

گام ۴ سهمی $y = x^2 + ax + b$ در $x = \sqrt[3]{4}$ بر محور x ها مماس شد؛ پس طبق

مورد (۲) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$x^2 + ax + b = (x - \sqrt[3]{4})^2 = x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} \Rightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt[3]{4} \\ b = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

پس $[\frac{b}{a}]$ می شود:

$$[\frac{b}{a}] = [\frac{2\sqrt[3]{2}}{-2\sqrt[3]{4}}] = [-\sqrt[3]{\frac{2}{4}}] = [-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}] = [-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}] = -1$$

گزینه ۲ - ۱۸

درس نامه ۱ برای نوشتن معکوس یک تابع مثل $y = 2x - 1$ ، کارهای زیر را

انجام می دهیم:

♦ جای x و y را عوض می کنیم:

$$x = 2y - 1$$

♦ y را تنها می کنیم:

$$2y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

۲ اگر خطی مثل شکل مقابل، طول از مبدأش p و عرض از مبدأش q باشد، معادله اش به این صورت می شود:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

۳ هم ارزی پرتوان برای حد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + \dots + a_nx + k}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + \dots + b_nx + k'}$ سه حالت زیر را مطرح می کند:

(الف) وقتی درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، یعنی $m > n$ ، حاصل حد بی نهایت می شود.

(ب) وقتی درجه مخرج از درجه صورت بیشتر باشد، یعنی $n > m$ ، حاصل حد صفر می شود.

(پ) وقتی درجه صورت با درجه مخرج برابر باشد، یعنی $m = n$ ، حاصل حد می شود:

$$\frac{\text{ضریب بزرگترین توان } x \text{ در صورت}}{\text{ضریب بزرگترین توان } x \text{ در مخرج}} = \frac{a_1}{b_1}$$

۳ فرمول مشتق بعضی از توابع را در جدول زیر برایتان آورده‌ایم:

تابع	فرمول مشتق
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

گام ۱ در $\frac{\pi}{4}$ ، $\sin 2x$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ و $x - \frac{\pi}{4}$ هر دو برابر صفرند، ولی $\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})$ صفر نیست، ببینید:

$$\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}) = \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \cot(0) = 1$$

گام ۲ پس با حد 0° طرف هستیم ولی طبق مورد (۲) درس‌نامه، اول $\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}) = 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم، بعد هوییتال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \cdot \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2 \cos(\pi) = -2$$

۲۱- گزینه ۴

۱ درس‌نامه تابع f به دو شرط در $x = a$ مشتق‌پذیر است:

♦ در $x = a$ پیوسته باشد.

♦ مشتق چپ و راست f در $x = a$ برابر باشند.

۲ تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ ، مشتق‌ناپذیر است.

۳ اگر $m > n$ باشد، تابع $y = \sqrt[n]{x-a}$ در $x = a$ مشتق ندارد.

گام ۱ در ضابطه بالایی f ، همان $|x|$ است؛ پس:

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b\sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

طبق مورد (۲) و (۳) درس‌نامه، $|x|$ و $\sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق‌ناپذیرند، ولی $x = 0$ دامنه ضابطه پایینی قرار ندارد، بنابراین آن تکنیک‌های f که در آن مشتق‌ناپذیر است، $x = 0$ در ضابطه بالایی است.

گام ۲ برای این‌که نقطه مشتق‌ناپذیر دیگری نداشته باشیم، باید f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، طبق مورد (۱) درس‌نامه این اتفاق به دو شرط می‌افتد:

♦ f در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

از ضابطه پایینی از ضابطه بالایی

$$\Rightarrow b\sqrt{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + |x|) \Rightarrow b = a + 1 \quad (1)$$

♦ مشتق چپ و راست f در $x = 1$ برابر باشند؛ در $x = 1^-$ ، $|x| = x$ می‌شود؛ پس برای محاسبه $f'_-(1)$ باید از $f(x) = a + x$ مشتق بگیریم:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f'_-(1) = 1$$

برای محاسبه $f'_+(1)$ هم از $f(x) = b\sqrt{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = b\sqrt{x} = bx^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'_+(1) = -\frac{1}{2}b(1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}b$$

$$\frac{1}{2}b = 1 \Rightarrow b = 2$$

حالا مشتق چپ و راست را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\frac{3}{2} = a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

حالا $b = 2$ را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم تا به a برسیم:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ می‌شود } a + b$$

گام ۱ در ضابطه بالایی می‌توانیم جای x^2 بنویسیم $|x|^2$:

$$\text{ضابطه بالایی} = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + a|x|} = \frac{|x|^2 + |x|}{|x|^2 + a|x|}$$

از طرفی دامنه ضابطه بالایی $x \neq 0$ است؛ پس $|x| \neq 0$ می‌شود و می‌توانیم در ضابطه بالا، $|x|$ را از صورت و مخرج بزنیم:

$$\text{ضابطه بالایی} = \frac{|x|(|x| + 1)}{|x|(|x| + a)} = \frac{|x| + 1}{|x| + a}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x| + 1}{|x| + a} & x \neq 0 \\ \frac{2a - 1}{2a + 2} & x = 0 \end{cases}$$

پس $f(x)$ به این صورت شد:

گام ۲ طبق مورد (۱) درس‌نامه، تابع بالا به شرطی در $x = 0$ پیوسته است که حد راست، حد چپ و مقدارش در $x = 0$ برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| + 1}{|x| + a} = \frac{0 + 1}{0 + a} = \frac{1}{a}$$

♦ حد راست:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| + 1}{|x| + a} = \frac{0 + 1}{0 + a} = \frac{1}{a}$$

♦ حد چپ:

$$f(0) = \frac{2a - 1}{2a + 2}$$

♦ مقدار:

هر سه مقدار بالا را مساوی هم می‌گذاریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{2a - 1}{2a + 2} \Rightarrow 2a + 2 = a(2a - 1) \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{روسی}} a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a - 4)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 4, -1$$

پس ریشه‌های معادله اصلی $a = \frac{4}{3}$ و $a = -\frac{1}{3}$ هستند.

گام ۲ می‌خواهیم f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؛ پس a ‌های قابل قبول است که ریشه مخرج تولید نکند. به ازای $a = -\frac{1}{3}$ ، ضابطه بالایی به فرم $(\frac{|x| + 1}{|x| - \frac{1}{3}})$ درمی‌آید که $x = \pm \frac{1}{3}$

ریشه‌های مخرجش هستند و متأسفانه در دامنه تابع حضور دارند؛ پس جفتشان نقاط ناپوستگی تابع هستند، بنابراین $a = 2$ را می‌پذیریم (در این حالت مخرج ضابطه بالایی می‌شود $|x| + 2$ که همواره مثبت است و ریشه ندارد).

گام ۳ حالا $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} f(x)$ را به ازای $a = 2$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|x| + 1}{|x| + 2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

از ضابطه بالایی

۲۰- گزینه ۳

۱ درس‌نامه اگر در محاسبه حد توابع کسری به $0/0$ برسیم، طبق قاعده هوییتال می‌توانیم به جای صورت و مخرج، مشتقشان را بنویسیم و بعد حد را حساب کنیم. این یعنی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ باشد، داریم:}$$

۲ قبل از استفاده از هوییتال، مقدار عوامل ضربی غیر صفر را جای‌گذاری می‌کنیم. مثلاً در حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x)$ ، به ازای $x = 1$ می‌شود $\cos \pi = -1$ که غیر صفر است؛ پس جای $\cos(\pi x)$ می‌نویسیم -1 و بعد هوییتال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \cos(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2 - x}{x - 1} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{2x - 1}{1} = -(2 - 1) = -1$$

۲۳ - گزینه ۲

درسنامه ۱ اگر به تعدادی داده با میانگین $\bar{x}$ ، چند داده جدید اضافه کنیم، به شرطی میانگین داده‌های جدید همان $\bar{x}$ می‌ماند که میانگین داده‌های اضافه‌شده هم $\bar{x}$ باشد.

۲ میانگین و واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و σ^2 نشان می‌دهیم و برای محاسبه‌شان از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام ۱ فرض می‌کنیم ۱۶ داده، $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ باشند. به گفته سؤال واریانشان برابر ۴۰ است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} 40 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2}{16} \\ \Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2 &= 640 \quad (1) \end{aligned}$$

گام ۲ سؤال می‌گوید با اضافه کردن دو داده m و n به ۱۶ داده $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ با میانگین $\bar{x}$ ، میانگین داده‌های جدید همان $\bar{x}$ باقی می‌ماند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانگین m و n هم باید $\bar{x}$ باشد:

$$\begin{aligned} \frac{m+n}{2} &= \bar{x} \quad (2) \\ 41 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{16} - \bar{x})^2 + (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 640 + (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2 &= 18 \times 41 \Rightarrow (m - \bar{x})^2 + (n - \bar{x})^2 = 98 \\ \text{طبق رابطه (۲) می‌توانیم به جای } \bar{x} \text{ در تساوی بالا بنویسیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m - \frac{m+n}{2})^2 + (n - \frac{m+n}{2})^2 &= 98 \Rightarrow (\frac{m-n}{2})^2 + (\frac{n-m}{2})^2 = 98 \\ \Rightarrow 2 \times \frac{(m-n)^2}{4} &= 98 \Rightarrow \frac{(m-n)^2}{2} = 98 \Rightarrow (m-n)^2 = 98 \times 2 = 196 \times 2 = 392 \\ \Rightarrow |m-n| &= \sqrt{392} = 14 \times 2 = 28 \end{aligned}$$

۲۴ - گزینه ۳

گام ۱ ترتیب قد ۱۰ نفر کلاً ۱۰! حالت دارد که در نیمی از آن‌ها، یعنی $\frac{10!}{2}$ نفر دوم بلندقدتر از نفر اول است.

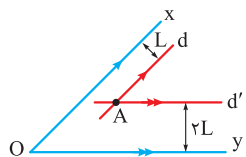
گام ۲ از طرفی با توجه به شکل زیر، در ۹! حالت، نفر دوم بلندقدترین است.

$$P = \frac{9!}{10!} = \frac{2 \times 9!}{10 \times 9!} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

گام ۳ پس احتمال مورد نظر می‌شود:

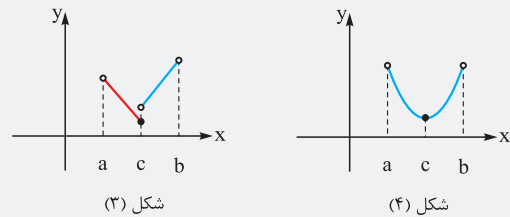
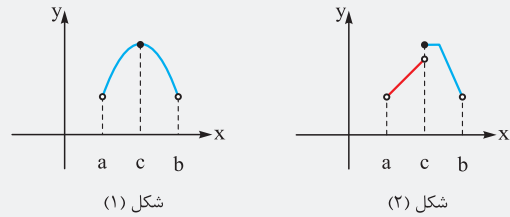
۲۵ - گزینه ۴

مطابق شکل، خط d را به فاصله L از Ox به موازاتش می‌کشیم. همین‌طور خط d' را به فاصله $2L$ از Oy به موازاتش رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این دو خط جواب مسئله است؛ بنابراین **۴** جواب است.



۲۲ - گزینه ۱

درسنامه ۱ در شکل‌های زیر نمودار توابع را در یک همسایگی از نقطه C کشیده‌ایم:



♦ در شکل‌های (۱) و (۲) عرض نقطه C ، بزرگ‌تر یا مساوی عرض تمام نقاط بازه (a, b) است. در چنین حالتی می‌گوییم تابع در $x = C$ ماکزیمم نسبی دارد.

♦ در شکل‌های (۳) و (۴) عرض نقطه C ، کوچک‌تر یا مساوی عرض تمام نقاط بازه (a, b) است. در چنین حالتی می‌گوییم تابع در $x = C$ مینیمم نسبی دارد.

۲ برای کشیدن نمودار $y = |f(x)|$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمت‌هایی از نمودار $f(x)$ که زیر محور x ها قرار دارند را نسبت به همین محور قرینه می‌کنیم و به قسمت‌های بالا و روی محور x ها هم دست نمی‌زنیم.

۳ برای کشیدن نمودار $y = f(|x|)$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمت‌هایی از نمودار را که سمت چپ محور y ها قرار دارند، حذف و قسمت‌هایی را که سمت راست محور y ها قرار دارند، نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

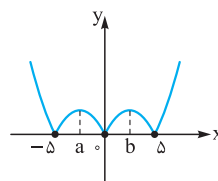
گام ۱ در $f(x) = x^2 - 5|x|$ ، جای x^2 می‌توانیم بنویسیم $|x|^2$:

$$f(x) = |x|^2 - 5|x|$$

بنابراین اگر فرض کنیم $g(x) = x^2 - 5x$ است، برای رسم $f(x)$ باید $g(|x|)$ را رسم کنیم. این کار را به کمک مورد (۳) درس‌نامه انجام می‌دهیم:

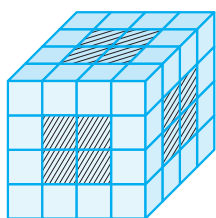
مرحله (۱)	مرحله (۲)	مرحله (۳)
رسم $g(x)$	حذف قسمت سمت چپ محور y ها	قرینه سمت راست نسبت به محور y ها

گام ۲ حالا اگر طبق مورد (۲) درس‌نامه، در شکل مرحله (۳)، قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به همین محور قرینه کنیم به نمودار $|g(|x|)|$ یا همان $|f(x)|$ می‌رسیم:



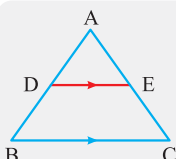
گام ۳ با توجه به شکل بالا و مورد (۱) درس‌نامه، نقاط به طول ۵ و ۰ و -۵، مینیمم نسبی و نقاط به طول a و b ، ماکزیمم نسبی هستند؛ پس $m = 2$ ، $n = 3$ و در نتیجه $\frac{n}{m}$ می‌شود $\frac{3}{2}$.

۲۷- گزینه ۴



مطابق شکل، در هر وجه، ۴ مکعب 1×1 با یک وجه رنگی وجود دارد. مکعب $4 \times 4 \times 4$ ، ۶ وجه دارد؛ پس تعداد کل این مکعب‌ها می‌شود $24 = 4 \times 6$.

۲۸- گزینه ۳



درس‌نامه ۱ در شکل مقابل، اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

◇ جزء به جزء:

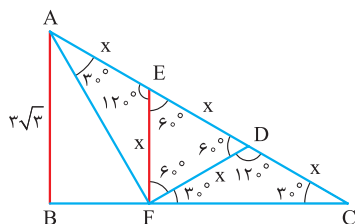
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

◇ جزء به کل:

۲ عکس قضیه تالس هم برقرار است؛ یعنی اگر در مثلث بالا یکی از تناسب‌های جزء به جزء یا جزء به کل برقرار باشد، می‌توانیم بگوییم $DE \parallel BC$ است.

۳ از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\begin{cases} a = ck \\ b = dk \end{cases}$ است. مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد، $\begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \end{cases}$ می‌شود.

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله): به گفته سؤال D و E ضلع AC در شکل زیر را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند، به همین خاطر طول هر سه را X در نظر می‌گیریم.



از طرفی مثلث EFD متساوی‌الاضلاع است، پس طول همه اضلاع مثلث ED برابر X و تمام زاویه‌های داخلی اش 60° اند. خوب به مثلث‌های AEF و FDC نگاه کنید، هر کدام دو ضلع برابر دارند؛ پس متساوی‌الساقین اند. طبق شکل، زاویه‌های AEF و FDC در این مثلث‌ها هر دو « $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ » هستند؛ پس زاویه‌های DCF، EAF و DFC هر سه برابر $30^\circ = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2}$ اند.

گام ۲ (اعمال تناسب‌ها روی شکل): خوب به مثلث AFC نگاه کنید، دو زاویه 30° دارد؛ پس این مثلث هم متساوی‌الساقین است، در نتیجه:

$$AF = FC \quad (1)$$

به گفته سؤال $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ است؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

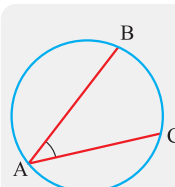
$$\diamond AF = 2k \xrightarrow{(1)} FC = 2k$$

$$\diamond BC = 3k$$

$$BF = BC - FC = 3k - 2k = k$$

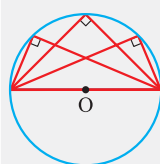
پس طول BF می‌شود:

۲۶- گزینه ۲

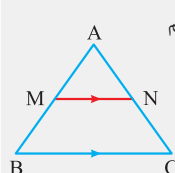


درس‌نامه ۱ به زاویه‌ای که مثل شکل مقابل، رأسش روی محیط دایره و دو ضلعش دو وتر از دایره باشد، زاویه محاطی می‌گوییم. اندازه این زاویه برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



۲ زاویه محاطی رو به قطر مطابق شکل مقابل همیشه 90° است.



۳ در شکل مقابل، پاره‌خط MN، وسط دو ضلع از مثلث را به هم وصل می‌کند، این پاره‌خط دوتا ویژگی دارد:

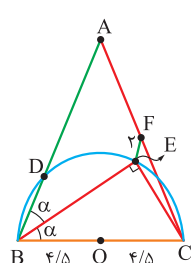
$$MN = \frac{BC}{2}$$

◇ طولش نصف طول ضلع سوم است:

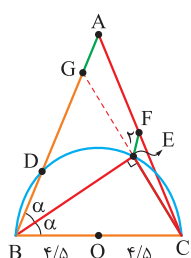
$$MN \parallel BC$$

◇ موازی ضلع سوم است:

۴ در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر قاعده همگی بر هم منطبق‌اند و برعکس؛ یعنی اگر در مثلثی ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز یا میانه هم باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



گام ۱ (تحلیل شکل مسئله): در شکل مقابل $\hat{E}$ ، زاویه محاطی رو به قطر است؛ پس طبق مورد (۲) درس‌نامه $\hat{E} = 90^\circ$ می‌شود. به گفته سؤال $\widehat{DE}$ و $\widehat{EC}$ برابرند؛ پس زاویه‌های محاطی DBE و EBC که رو به این کمان‌ها هستند هم برابرند؛ به همین خاطر روی شکل جفتشان را α در نظر می‌گیریم.



گام ۲ (افزودن پاره‌خط مناسب به شکل): الان اگر EC را امتداد بدهیم تا ضلع AB را در G قطع کند، مثلث BGC درست می‌شود که در آن BE هم ارتفاع است و هم نیمساز؛ پس این مثلث طبق مورد (۴) درس‌نامه متساوی‌الساقین است، در نتیجه:

◇ BE میانه هم هست؛ یعنی E وسط ضلع GC است.

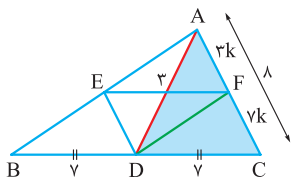
◇ ساق‌های BC و BG برابرند: $BG = BC \Rightarrow BG = 4/5 + 4/5 = 9$

گام ۳ (محاسبه طول AG و خواسته سؤال): به گفته سؤال $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ است؛ پس F باید وسط ضلع AC باشد. حالا خوب به پاره‌خط EF در مثلث AGC نگاه کنید. این پاره‌خط وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند؛ پس طبق مورد (۳) درس‌نامه، طولش نصف طول ضلع سوم مثلث است:

$$EF = \frac{AG}{2} \Rightarrow 2 = \frac{AG}{2} \Rightarrow AG = 4$$

$$AB = BG + GA = 9 + 4 = 13$$

بنابراین طول AB می‌شود:



گام ۳ (تعیین نقش DF در مثلث ADC): به گفته سؤال طول BC در شکل زیر برابر ۱۴ و نقطه D وسط ضلع BC است؛ پس می‌توانیم روی شکل بنویسیم:

$$BD = DC = \frac{14}{2} = 7$$

سؤال می‌گوید در مثلث ADB، DE نیمساز است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EB}$$

از طرفی در مثلث ABC، EF موازی‌اند، پس می‌توانیم در این مثلث تالس جزء به جزء

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \quad (۲)$$

بنویسیم:

سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) برابرند، پس سمت چپشان هم باید برابر باشند:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} \quad (*)$$

خوب که به تناسب (*) و مثلث ADC نگاه کنید؛ می‌فهمید تناسب مربوط به نیمساز داخلی، در آن برقرار است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم DF نیمساز داخلی مثلث ADC است.

گام ۴ (محاسبه طول AF و FC): در مثلث رنگی DF نیمساز است؛ پس طبق درس‌نامه می‌توانیم تناسب زیر را بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{2}{7} \Rightarrow AF = 2k, FC = 7k$$

حالا برای محاسبه k، طول AC را مساوی ۸ می‌گذاریم:

$$AC = 8 \Rightarrow 2k + 7k = 8 \Rightarrow k = 8/9$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال): حالا به کمک فرمول درس‌نامه، طول نیمساز DF در مثلث رنگی بالا را به دست می‌آوریم:

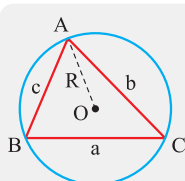
$$DF^2 = AD \times AC - AF \times FC \Rightarrow DF^2 = 7 \times 8 - (2k)(7k)$$

$$\Rightarrow DF^2 = 56 - 21k^2 \Rightarrow DF^2 = 56 - 21(8/9)^2$$

$$DF^2 = 56 - 21(64/81) = 56 - 168/9 = 56 - 18.67 = 37.33$$

$$\Rightarrow DF = \sqrt{37.33} = 6.11$$

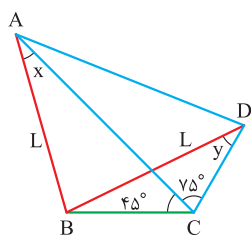
۳۱ - گزینه ۳



درس‌نامه قضیه سینوس‌ها می‌گوید در همه مثلث‌ها، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش، مساوی قطر دایره محیطی مثلث است؛ یعنی برای مثلث ABC در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

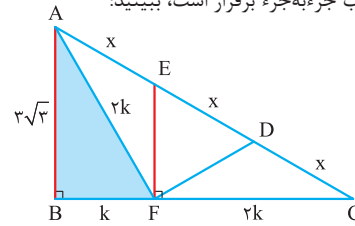
شعاع دایره محیطی



$$AB = AD = L$$

حالا خوب به مثلث‌های ABC و BDC نگاه کنید. اطلاعات جالبی در مورد زاویه‌ها و اضلاع روبه‌رویشان در این مثلث‌ها داریم؛ پس بهترین کار نوشتن قضیه سینوس‌ها در این مثلث‌ها است.

اطلاعات جدید را به صورت زیر، به شکل اضافه می‌کنیم، زاویه EFC را هم با توجه به شکل قبل قائمه می‌گذاریم. در مثلث ABC، تناسب جزء به جزء برقرار است، ببینید:



$$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB} \Rightarrow \frac{2x}{x} = \frac{2k}{k} \quad \checkmark$$

پس طبق مورد (۲) درس‌نامه EF و AB موازی‌اند؛ بنابراین AB هم باید مثل EF بر BC عمود باشد.

گام ۴ (محاسبه k و خواسته سؤال): در مثلث قائم‌الزاویه رنگی بالا فیثاغورس می‌نویسیم تا به k برسیم:

$$(3\sqrt{3})^2 + k^2 = (2k)^2 \Rightarrow 27 = 3k^2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

بنابراین طول FC می‌شود: $FC = 2k = 2 \times 3 = 6$

۲۹ - گزینه ۱

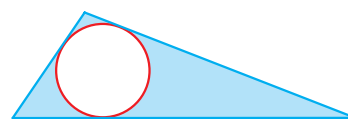
درس‌نامه اگر مساحت مثلثی S و نصف محیطش p باشد، شعاع دایره محیطی اش می‌شود:

$$r = \frac{S}{p}$$

گام ۳ (پیدا کردن رابطه بین شعاع دایره و مساحت مثلث): فرض می‌کنیم شعاع دایره محیطی r و مساحت مثلث برابر S باشد. به گفته سؤال محیط مثلث برابر $\sqrt{48\pi}$ است؛ پس طبق درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{S}{\frac{\sqrt{48\pi}}{2}} \Rightarrow r = \frac{2S}{\sqrt{48\pi}} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{12\pi}r}{2} \quad (*)$$

گام ۴ (محاسبه خواسته سؤال): مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر برابر ۳ است؛ پس باید بنویسیم:



$$S_{\Delta} - S_{\text{O}} = 3 \Rightarrow S - \pi r^2 = 3 \xrightarrow{*} \sqrt{12\pi}r - \pi r^2 = 3$$

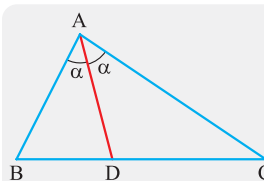
$$\Rightarrow \pi r^2 - \sqrt{12\pi}r + 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{12\pi} \pm \sqrt{12\pi - 4(\pi)(3)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{12\pi}}{2\pi}$$

$$S = \frac{\sqrt{12\pi} \times \sqrt{12\pi}}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$$

حالا مقدار r را در (*) جای گذاری می‌کنیم:

۳۰ - گزینه ۴

درس‌نامه ۱ نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناریش قطع می‌کند؛ یعنی اگر در شکل مقابل، AD نیمساز باشد می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

عکس موضوع بالا هم برقرار است؛ یعنی اگر در مثلث ABC، تناسب بالا برقرار باشد، می‌توانیم بگوییم AD نیمساز داخلی زاویه A است.

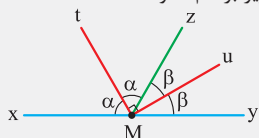
۲ برای محاسبه طول نیمساز AD هم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

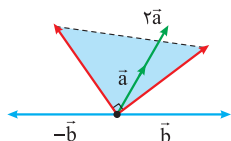
۳۳- گزینه ۳

۱ درسنامه به هر برداری که طولش برابر ۱ باشد، بردار یکه می‌گوییم.

۲ نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل زیر بر هم عمودند.



۱۴۳ (رسم شکل و تحلیل آن): شکل مسئله به صورت زیر است. بردارهای قرمز، همان بردارهای یکه در راستای نیمسازها هستند که طبق مورد (۱) درسنامه طولشان برابر ۱ است.



طبق شکل، بردارهای یکه در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند؛ پس طبق مورد (۲) درسنامه بر هم عمودند.

۱۴۴ (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال مساحت مثلث قائم‌الزاویه رنگی هستیم که می‌شود

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

۱۴۵ مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است، چون کتاب درسی فقط به بردارهای یکه محوره‌های مختصات (همان $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) پرداخته و بردار یکه را در حالت کلی بررسی نکرده است.

۳۴- گزینه ۴

۱ درسنامه دترمینان چند ماتریس خاص را به کمک جدول زیر، خیلی سریع حساب کنید:

$A = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \text{ یا } B = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$	ماتریس خاص
$\text{یا } C = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$	
$ A = B = C = abc$ ضرب درایه‌های قطر اصلی	دترمینان
$D = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix} \text{ یا } E = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$	ماتریس خاص
$\text{یا } F = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$	
$ D = E = F = -abc$ قرینه ضرب درایه‌های قطر فرعی	دترمینان

۲ دترمینان برای ضرب ماتریس‌های مربعی جدا می‌شود؛ یعنی برای سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه A , B و C می‌توانیم بنویسیم:

۳ توان از دترمینان خارج می‌شود؛ یعنی:

۱۴۶ (اجرای استراتژی):

$$\triangle ABC: \frac{\sin x}{BC} = \frac{\sin 45^\circ}{L}$$

$$\triangle BDC: \frac{\sin y}{BC} = \frac{\sin 12^\circ}{L}$$

۱۴۷ (محاسبه خواسته سؤال): حالا طرفین رابطه‌های بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{BC} \cdot \frac{\sin y}{\sin 12^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 12^\circ} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2} (*)$$

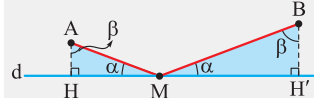
به گفته سؤال $x + y = 90^\circ$ است؛ پس x و y متمم هم‌اند و می‌توانیم به جای $\sin y$ در (*) بنویسیم $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \arctan(\sqrt{2})$$

۳۲- گزینه ۲

۱ درسنامه در شکل زیر، نقطه‌های ثابت A و B در یک سمت خط d قرار دارند.

در این حالت طول مسیر AMB وقتی حداقل می‌شود که مثلث‌های رنگی با زاویه‌های α و β متشابه باشند.

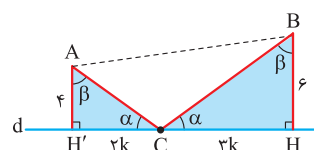


۲ برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت تشابه، اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها، اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل بالا برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

روبه α روبه β روبه θ

۱۴۸ (محاسبه طول HH'): در شکل زیر BH و AH' هر دو بر خط d عمودند، پس موازی‌اند؛ بنابراین چهارضلعی $AH'HB$ یک دوزنقه است. به گفته سؤال مساحت این دوزنقه برابر $50\sqrt{3}$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:



$$S_{AH'HB} = \frac{1}{2} (AH' + BH) \times HH' \Rightarrow 50\sqrt{3} = \frac{1}{2} (4 + 6) HH'$$

$$\Rightarrow 50\sqrt{3} = 5 HH' \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3}$$

۱۴۹ (تحلیل مسیر ACB): سؤال می‌گوید محیط مثلث ABC حداقل است. در این مثلث طول ضلع AB که ثابت است، پس محیط وقتی حداقل می‌شود که طول مسیر ACB حداقل باشد. طبق مورد (۱) درسنامه، این اتفاق وقتی می‌افتد که مثلث‌های رنگی متشابه باشند.

۱۵۰ (محاسبه خواسته سؤال): حالا به کمک مورد (۲) درسنامه، نسبت تشابه مثلث‌های رنگی را می‌نویسیم:

$$\frac{CH'}{CH} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{CH'}{CH} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow CH' = 2k, CH = 3k$$

طبق شکل، $CH' + CH$ همان $HH' = 10\sqrt{3}$ است؛ پس:

$$2k + 3k = 10\sqrt{3} \Rightarrow 5k = 10\sqrt{3} \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$$

$$CH = 3k = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

بنابراین طول CH می‌شود:

گام ۴ (محاسبه $|A|$ و $|B|$): به کمک مورد (۱) درس نامه، $|A|$ و $|B|$ را سریع حساب می‌کنیم:

$$\diamond |A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\diamond |B| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(3)(4) = -24$$

گام ۵ (محاسبه خواسته سؤال): به دنبال $|D| = |BA^T B|$ هستیم. اول به کمک مورد (۲) درس نامه، دترمینان را برای ضرب جدا جدا می‌نویسیم:

$$|D| = |B| |A^T| |B| = |B|^2 |A^T|$$

طبق مورد (۳) درس نامه، $|A^T|$ همان $|A|$ است؛ پس $|D|$ می‌شود:

$$|D| = |B|^2 |A| = (-24)^2 \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{24 \times 24}{6} = -\frac{1}{3}$$

۳۵ - گزینه ۱

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال): به گفته سؤال $C = A \times B$ است؛ پس می‌توانیم در $D = B \times C \times A$ به جای C بنویسیم $A \times B$:

$$D = B \times A \times B \times A = (B \times A) \times (B \times A) = (B \times A)^2$$

پس $|D| = |(B \times A)^2|$ می‌شود که توان ۲ هم می‌تواند از دترمینان خارج بشود:

$$|D| = |B \times A|^2 (*)$$

گام ۲ (محاسبه $|B \times A|$): اول درایه‌های $B \times A$ را به دست می‌آوریم:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☆ نکته دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌شود: $|A| = ad - bc$

طبق نکته بالا $|B \times A| = 2 - 0 = 2$ می‌شود.

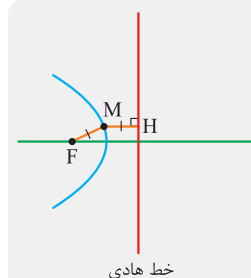
گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): حالا با جای گذاری $|B \times A| = 2$ در (*) به خواسته سؤال می‌رسیم:

$$|D| = 2^2 = 4$$

۳۶ - گزینه ۳

درس نامه ۱ هر نقطه‌ای روی سهمی باشد، فاصله‌اش از کانون و خط هادی به یک اندازه است. مثلاً برای نقطه M در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$MF = MH \quad M \in \text{روی سهمی است}$$



خط هادی

۲ اگر در معادله سهمی y^2 داشته باشیم، سهمی افقی و اگر x^2 داشته باشیم، سهمی قائم است.

۳ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم یا به عرض رأس می‌رسیم یا به طولش.

چهارم بفهمیم کدام؟ در جواب باید بگوییم اگر متغیر درجه دوم x بود، به طول رأس ولی اگر y بود، به عرض رأس می‌رسیم.

۴ برای پیدا کردن مقدار a از روی معادله گسترده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$a = -\frac{\text{ضریب متغیر درجه اول}}{\text{ضریب متغیر درجه ۲}}$$

۵ در سهمی:

♦ اگر $a > 0$ باشد، دهانه یا رو به بالا است یا رو به راست.

♦ اگر $a < 0$ باشد، دهانه یا رو به پایین است یا رو به چپ.

گام ۱ (پیدا کردن a و مختصات رأس): طبق مورد (۲) سهمی اگر از معادله

$$x = -y^2 + 5y - 6$$

$$y^2 - 5y + x + 6 = 0$$

$$2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

حالا $y = \frac{5}{2}$ را در معادله سهمی جای گذاری می‌کنیم تا به طول رأس برسیم:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$$

پس مختصات رأس می‌شود: $S\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$

a هم که طبق مورد (۴) درس نامه می‌شود:

$$y^2 - 5y + x + 6 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{1 \times 4} = -\frac{1}{4}$$

گام ۲ (پیدا کردن کانون و خط هادی): در معادله سهمی، y^2 داریم و $a < 0$ شد؛ پس طبق مورد (۲) و (۵) درس نامه، دهانه سهمی باید مثل شکل مقابل رو به چپ باشد. طبق شکل اگر از رأس به اندازه $|a| = \frac{1}{4}$ به سمت راست برویم به خط هادی می‌رسیم:

$$S\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\frac{1}{4} \text{ واحد به}} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال): به گفته سؤال نقطه مطابق شکل مقابل، روی سهمی قرار دارد؛ پس طبق مورد (۱) درس نامه، فاصله A از F و خط هادی باید یکسان باشد. به گفته سؤال $AF = 1/5$ و

طبق شکل، $AH = \left|\alpha - \frac{1}{2}\right|$ است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$AH = AF \Rightarrow \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = 1/5 \Rightarrow \alpha - 1/5 = \pm 1/5 \Rightarrow \alpha = 0/5 \pm 1/5$$

$$\Rightarrow \alpha = 2/5, -1/5$$

این جا باید حواسمان باشد که طبق شکل، A سمت چپ خط هادی $x = \frac{1}{2}$ قرار دارد؛ پس طول نقطه A ، یعنی α باید کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد؛ بنابراین $\alpha = -1/5$ را می‌پذیریم.

۳۷ - گزینه ۲

درس نامه دوتا از ویژگی‌های بخش پذیری را ببینید:

$$a|b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a|mb \quad \text{و} \quad \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b \pm c$$

گام ۱ به کمک ویژگی‌های درس نامه، ضریب m را در هر دو بخش پذیری یکسان می‌کنیم:

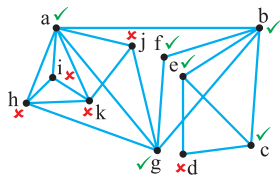
$$a|7m + 2 \xrightarrow{\times 11 \text{ سمت راست}} a|77m + 22$$

$$a|11m + 4 \xrightarrow{\times 7 \text{ سمت راست}} a|77m + 28$$

حالا سمت راست بخش پذیری‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

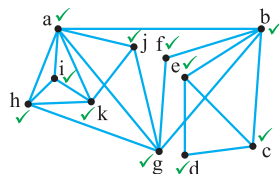
$$a|(77m + 28) - (77m + 22) \Rightarrow a|6 \xrightarrow{a>3} a=6$$

رأس c (حالت ۳)



گام ۱ طبق «شفاف‌سازی» می‌خواهیم هر رأس را یک بار احاطه کنیم؛ پس در گراف‌های جدول بالا، رأس‌های دارای $\checkmark$ و $\times$ را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. طبق جدول بالا، در حالت اول حق انتخاب هیچ رأسی را نداریم؛ پس این حالت رد می‌شود. در حالت‌های (۲) و (۳) هم حق انتخاب f و g را نداریم، پس در این حالت‌ها f قطعاً احاطه نمی‌شود؛ پس این حالت‌ها هم رد می‌شوند.

گام ۲ پس فقط می‌ماند رأس d. با انتخاب این رأس مطابق شکل مقابل، اگر f و k را هم اضافه کنیم به مجموعه احاطه‌گر مینیمم {d, f, k} می‌رسیم که شرایط مسئله را دارد؛ بنابراین مسئله یک جواب دارد.



فیزیک

۴۱ - گزینه ۴

بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲: از رابطه توان مصرفی مقاومت داریم:

$$P = VI \Rightarrow P_{\text{یکای}} = (V_{\text{یکای}}) \times (I_{\text{یکای}}) \Rightarrow P_{\text{یکای}} = V.A \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{I=\frac{q}{t}} P_{\text{یکای}} = (V_{\text{یکای}}) \times \left(\frac{q_{\text{یکای}}}{t_{\text{یکای}}}\right) = V \cdot \frac{C}{s} \quad \checkmark$$

۳ و ۴:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F.d}{t} \Rightarrow P_{\text{یکای}} = \frac{(F_{\text{یکای}}) \times (d_{\text{یکای}})}{(t_{\text{یکای}})} = \frac{N.m}{s} \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{F=ma} P_{\text{یکای}} = \frac{(m_{\text{یکای}}) \times (a_{\text{یکای}}) \times (d_{\text{یکای}})}{t_{\text{یکای}}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{یکای}} = \frac{kg \times \frac{m}{s^2} \times m}{s} = \frac{kg.m^2}{s^3} \quad \times$$

تیزبازی با نگاهی به گزینه‌ها، واضح است که طبق رابطه اصلی توان یعنی $P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t}$ یکی از یکاهای توان $\frac{\text{متر} \times \text{نیوتون}}{\text{ثانیه}}$ است (۳) میره کتار. از طرفی می‌دانیم طبق رابطه $I = \frac{q}{t}$ ، یکای آمپر معادل یکای $\frac{\text{کولن}}{\text{ثانیه}}$ است؛ پس یکاهایی که در (۱) و (۲) آمده معادل اند و نمی‌توانند جواب تست باشند (چون آگه یکیش یکای توان نباشه، دیگری هم نیست. تست هم که نمی‌تونه دوتا جواب داشته باشه). با این توضیحات (۴) جواب تست است.

۴۲ - گزینه ۳

درس‌نامه ۱ توان متوسط:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \rightarrow \text{کار انجام شده (J)} \\ \rightarrow \text{مدت زمان انجام کار (s)}$$

۲ اگر شخصی به جرم m به اندازه h در امتداد قائم و رو به بالا جابه‌جا شده، در صورتی که در ابتدا و انتهای مسیر ساکن باشد، کاری که شخص انجام می‌دهد، از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$W = mgh \\ \downarrow \\ \text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}$$

گام ۱ حالا باید بفهمیم کدام گزینه به ازای $a = 6$ نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد. در $ak + 3$ این جوری است، چون به ازای $a = 6$ می‌شود $6k + 3 = 3(k + 1)$ می‌شود. اول بزرگ‌تر از ۳ می‌تواند مضرب ۳ باشد؟ قطعاً نه؛ پس همین گزینه جواب است.

۳۸ - گزینه ۴

گام ۱ اگر اتاق‌ها یکسان نباشند، تعداد راه‌های اسکان دادن ۱۰ نفر در ۵ اتاق دونه‌ره می‌شود:

$$\left(\begin{matrix} 10 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

گام ۲ ولی به گفته سؤال ۵ اتاق یکسان داریم که! جایگشت دارند؛ پس برای رسیدن به جواب، عدد بالا را بر ۵! تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\left(\begin{matrix} 10 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}\right)}{5!} = \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times 1 \\ = \frac{45 \times 28 \times 15 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 45 \times 21 = 945$$

۳۹ - گزینه ۲

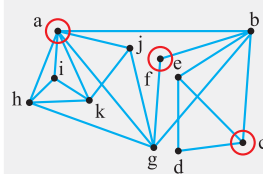
درس‌نامه در مسائل اصل لانه‌کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و تا آخرین نفس با سؤال لج می‌کنیم.

گام ۱ سؤال به دنبال این است که حداقل ۳ گوی آبی یا حداقل ۴ گوی سبز یا حداقل ۲ گوی قرمز یا حداقل ۵ گوی سفید بیرون بیاوریم؛ پس بدترین حالت ممکن بیرون آوردن «۳-۱=۲» گوی آبی، «۴-۱=۳» گوی سبز، «۲-۱=۱» گوی قرمز و «۵-۱=۴» گوی سفید است.

گام ۲ تا این‌جا «۲+۳+۱+۴=۱۰» گوی بیرون آورده‌ایم ولی به خواسته مسئله نرسیده‌ایم، اما به محض این‌که گوی بعدی را برداریم، یکی از حداقل‌های سؤال برآورده می‌شود. مثلاً اگر گوی ۱۱ام سبز باشد، ۴ گوی سبز خواهیم داشت؛ بنابراین حداقل ۱۱ گوی باید بیرون بیاوریم.

۴۰ - گزینه ۳

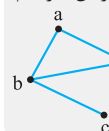
شفاف‌سازی هر رأس گراف فقط متعلق به یکی از همسایگی‌های بسته اعضای مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد؛ یعنی هر رأس گراف فقط یک بار احاطه می‌شود حالا یا توسط خودش یا توسط یک رأس دیگر.



مثلاً مجموعه احاطه‌گر مینیمم {a, c, f} چنین خاصیتی ندارد، چون در این مجموعه، رأسی مثل g دو بار احاطه می‌شود؛ یک بار توسط a و یک بار توسط f.

درس‌نامه

به مجموعه رأس‌های مجاور با یک رأس مثل a، همسایگی باز رأس a می‌گوییم و آن را با $N_G(a)$ نشان می‌دهیم. مثلاً در گراف زیر، $N_G(a) = \{b, d\}$ است. اگر خود رأس a را هم به $N_G(a)$ اضافه کنیم، به همسایگی بسته رأس a می‌رسیم و آن را با $N_G[a] = \{a, b, d\}$ نشان می‌دهیم:



گام ۱ کار را با احاطه کردن رأس‌های e, b, c و d شروع می‌کنیم. بیاید ببینیم با انتخاب هر کدام از رأس‌های e, b, c و d چه رأس‌هایی احاطه می‌شوند:

رأس e (حالت ۲)	رأس b (حالت ۱)

گام ۱ حالا می‌توانیم بگوییم سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول، چند برابر سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه سوم است:

$$\frac{v_{av(0,5)}}{v_{av(10,15)}} = \frac{\frac{x_5 - x_0}{(5-0)}}{\frac{x_{15} - x_{10}}{(15-10)}} = \frac{\frac{-225}{4} + 30 - 30}{\frac{-225}{4} + 30 - (-75 + 30)}$$

$$= \frac{\frac{-225}{4}}{\frac{-225}{4} + 30 - (-75 + 30)} = \frac{-225}{-225 + 300} = -3$$

روش ابتدا نکته زیر را بخوانید:

نکته در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر سرعت متحرک در لحظه وسط این بازه (یعنی $t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$) است.

گام ۲ چون معادله مکان - زمان از نوع درجه ۲ است، پس این حرکت با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم است و می‌توانیم با مقایسه معادله داده شده و رابطه $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ شتاب و سرعت اولیه را مشخص کنیم و معادله سرعت $(v = at + v_0)$ را بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 - 15t + 30 \quad \frac{1}{2}a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{1} \text{ m/s}^2 \quad v_0 = -15 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{3}{1}t - 15$$

گام ۳ با توجه به نکته بالا، سرعت متوسط در بازه زمانی $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_1 = 5 \text{ s}$ برابر سرعت متحرک در لحظه $t' = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2} \text{ s}$ و سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_2 = 10 \text{ s}$ تا $t_3 = 15 \text{ s}$ برابر سرعت متحرک در لحظه $t' = \frac{15+10}{2} = \frac{25}{2} \text{ s}$ است.

$$\frac{v_{av(0,5)}}{v_{av(10,15)}} = \frac{v_{\frac{5}{2}}}{v_{\frac{25}{2}}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} - 15}{\frac{3}{2} \times \frac{25}{2} - 15} = \frac{-\frac{45}{2}}{\frac{15}{2}} = -3$$

۴۷ - گزینه ۴

گام ۱ با توجه به نکته‌ای که در روش دوم پاسخ تست قبل گفتیم در حرکت مستقیم شتاب ثابت، هر جا که جابه‌جایی و بازه زمانی جابه‌جایی را داشته باشیم، می‌توانیم سرعت متوسط که همان سرعت لحظه وسط آن بازه زمانی است را حساب کنیم. در شکل مقابل در بازه زمانی صفر تا ۲ س متحرک -20 m جابه‌جا شده است؛ پس

سرعت متحرک در لحظه $t' = 1 \text{ s}$ برابر می‌شود با:

$$v_1 = v_{av(0,2)} = \frac{\Delta x_{(0,2)}}{2-0} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ m/s}$$

گام ۲ یک بار دیگر به نمودار نگاه کنید. متحرک در لحظه وسط بازه زمانی ۲ س تا ۵ س برای یک لحظه سرعتش صفر شده و تغییر جهت داده است؛ پس لحظه تغییر جهت برابر $t' = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} \text{ s}$ است.

گام ۳ چون شتاب ثابت است، شتاب متوسط در تمام بازه‌های زمانی از جمله $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t' = \frac{7}{2} \text{ s}$ و همچنین $t_1 = 1 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ برابر است؛ پس داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ ثابت} \Rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{v' - v_1}{t' - t_1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{(t' = \frac{7}{2} \text{ s}, v' = 0), (t_1 = 1 \text{ s}, v_1 = -10 \text{ m/s})}{(t_2 = 5 \text{ s}, v_2 = ?)} \Rightarrow \frac{0 - (-10)}{\frac{7}{2} - 1} = \frac{v_2 - (-10)}{5 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{10}{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{v_2 + 10}{4} \Rightarrow 16 = v_2 + 10 \Rightarrow v_2 = 6 \text{ m/s}$$

گام ۱ ابتدا کار انجام شده توسط شخص را از رابطه توان متوسط محاسبه می‌کنیم:

$$P_{av} = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow W = P_{av} \times \Delta t = 300 \times 1 \times 60 = 18000 \text{ J}$$

گام ۲ از رابطه $W = mgh$ ، جابه‌جایی قائم شخص را به دست می‌آوریم:

$$W = mgh \Rightarrow 18000 = 60 \times 10 \times h \Rightarrow h = 30 \text{ m}$$

گام ۳ ارتفاع هر پله ۲۵ cm است؛ پس داریم:

$$h = n \times \text{ارتفاع هر پله} \Rightarrow n = \frac{30}{25 \times 10^{-2}} = 120$$

۴۳ - گزینه ۱

با توجه به این که هر دور برابر 2π رادیان است، به کمک روش تبدیل زنجیره‌ای داریم:

$$\text{رادیان } \frac{3\pi}{2} = \frac{45 \times 2\pi}{4} = \frac{45}{4} \times \frac{2\pi}{1} \times \frac{1}{\text{دوره}} \times \frac{1}{\text{دقیقه}} \times \frac{60}{\text{دوره}} \times \frac{1}{\text{دقیقه}} = 45 \times \frac{1}{\text{دوره}} \times \frac{1}{\text{دقیقه}}$$

۴۴ - گزینه ۲

بررسی عبارت‌ها:

- (الف) تندی انتشار تمام موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ یکسان و برابر با تندی نور است. ✓
- (ب) پرتوهای پرانرژی گاما (که انرژی‌شان از مرتبه MeV است)، با تغییر تراز نوکلئون‌ها در هسته‌های برانگیخته تولید می‌شوند، در حالی که منشأ تولید پرتوهای کم‌انرژی‌تر مانند فرابنفش، نور مرئی و ... تغییر تراز الکترون‌های اتم است. ✗
- (ج) تمام موج‌های الکترومغناطیسی جزء امواج عرضی هستند. ✓
- (د) روش‌های تولید، کاربرد، روش‌های تشخیص و آشکارسازی طیف‌های مختلف امواج الکترومغناطیسی با یکدیگر متفاوت است. ✗

۴۵ - گزینه ۳

درس‌نامه انرژی جنبشی جسمی به جرم m و تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

گام ۱ تندی متحرک ۲۵ درصد افزایش یافته است؛ پس:

$$v_2 = v_1 + \frac{25}{100}v_1 = \frac{5}{4}v_1 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{4}$$

انرژی جنبشی نیز ۲۵ درصد افزایش یافته است؛ پس:

$$K_2 = K_1 + \frac{25}{100}K_1 = \frac{5}{4}K_1 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{5}{4}$$

گام ۲ رابطه انرژی جنبشی را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow m_2 = 4 \text{ kg}$$

تغییرات جرم متحرک برابر است با:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 4 - 5 = -1 \text{ kg}$$

۴۶ - گزینه ۱

روش **گام ۱** ۵ ثانیه اول همان بازه زمانی $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_1 = 5 \text{ s}$ و ۵ ثانیه سوم بازه زمانی

$t_2 = 10 \text{ s}$ تا $t_3 = 15 \text{ s}$ است؛ پس اگر بخواهیم این تست را از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ پاسخ بدهیم، باید مکان‌های متحرک را در لحظه‌های $t_0 = 0 \text{ s}$ ، $t_1 = 5 \text{ s}$ ، $t_2 = 10 \text{ s}$ و $t_3 = 15 \text{ s}$ حساب کنیم:

$$x_0 = \frac{3}{4}(0)^2 - 15(0) + 30 \Rightarrow x_0 = 30 \text{ m}$$

$$x_5 = \frac{3}{4}(5)^2 - 15(5) + 30 \Rightarrow x_5 = \frac{3 \times 25}{4} - 75 + 30 = \frac{-225}{4} + 30 \text{ (m)}$$

$$x_{10} = \frac{3}{4}(10)^2 - 15(10) + 30 \Rightarrow x_{10} = 75 - 150 + 30 = -75 + 30 \text{ (m)}$$

$$x_{15} = \frac{3}{4}(15)^2 - 15(15) + 30 \Rightarrow x_{15} = \frac{3 \times 225}{4} - 225 + 30 = \frac{-225}{4} + 30 \text{ (m)}$$

۵۰- گزینه ۴

درس نامه سطح زیر نمودار نیرو - زمان بیانگر تغییرات تکانه یا حاصل ضرب جرم در تغییرات سرعت است.

$S = \Delta p = m\Delta v$

گام ۱ مساحت زیر نمودار نیرو - زمان داده شده را برابر $m\Delta v$ قرار می‌دهیم تا تغییرات سرعت معلوم شود:



$$S_1 + S_2 + S_3 = m\Delta v \xrightarrow{m=4 \text{ kg}} (2 \times 6) + (2 \times 8) + (1 \times 1) = 4 \times \Delta v$$

$$\Rightarrow 32 = 4\Delta v \Rightarrow \Delta v = 8 \text{ m/s}$$

گام ۲ شتاب متوسط هم از رابطه اصلی‌اش یعنی $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8}{1} = 8 \text{ m/s}^2$$

۵۱- گزینه ۴

درس نامه شکل زیر آونگی را نشان می‌دهد که به دلیل وجود شتاب منحرف شده است. مطابق این شکل، اگر نیروی کشش نخ را به دو مؤلفه افقی و قائم‌شیب تجزیه کنیم، مؤلفه قائم‌شیب (یعنی T_y) نیروی وزن (mg) را خنثی می‌کند و مؤلفه افقی‌اش (یعنی T_x) همان نیرویی است که شتاب را ایجاد کرده است. همین‌طور که در شکل می‌بینید، انحراف نخ آونگ در خلاف جهت T_x است؛ پس می‌توانیم بگوییم انحراف نخ آونگ همواره خلاف جهت شتاب ناشی از T_x است، یعنی انحراف نخ آونگ همواره در خلاف جهت شتاب گلوله آونگ است.

الف) وقتی شتاب خودرو و همین‌طور هر چه در آن است (از جمله گلوله آونگ) رو به جلو است، انحراف نخ آونگ رو به عقب است.

ب) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب مرکزگرا است؛ یعنی جهت شتاب به سمت مرکز دایره بوده و در نتیجه جهت انحراف نخ آونگ در خلاف جهت شتاب یعنی به سمت بیرون دایره است.

۵۲- گزینه ۲

درس نامه ۱ نمودار تکانه - زمان در واقع همان نمودار سرعت - زمان است که جرم جسم در سرعت آن ضرب شده است؛ بنابراین نمودار تکانه - زمان حرکت سقوط آزاد شبیه نمودار سرعت - زمان این حرکت است و با توجه به این که معادله سرعت - زمان این حرکت $v = -gt$ است، داریم:



۲ رابطه مستقل از زمان حرکت سقوط آزاد (با سرعت اولیه صفر): $v^2 = -2g\Delta y$

گام ۱ گلوله از ارتفاع ۵ متری از سطح زمین رها شده است. با توجه به این که زمان حرکت گلوله داده نشده است، سرعت نهایی را از رابطه مستقل از زمان، حساب می‌کنیم:

$$v^2 = -2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y = -5 \text{ m}} v^2 = -2 \times 10 \times (-5) = 100 \Rightarrow v = -10 \text{ m/s}$$

(چون جهت حرکت رو به پایین است، علامت سرعت نهایی را منفی گذاشتیم.)

۴۸- گزینه ۱

درس نامه معادله مکان - زمان سقوط یک جسم که در شرایط خلأ رها می‌شود، به صورت زیر است:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$$

گام ۱ بینیم کل این حرکت چند ثانیه طول می‌کشد:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{\Delta y = -12/8 \text{ m}, g = 10 \text{ m/s}^2} -12/8 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 2/5 \Rightarrow t = 1/5 \text{ s}$$

گام ۲ حالا باید بینیم سنگ تا $1/5 \text{ s}$ قبل از رسیدن به سطح زمین یعنی در مدت $t' = 1/5 - 0/6 = 1/6 \text{ s}$ پس از رهاشدن، چند متر جابه‌جا شده است:

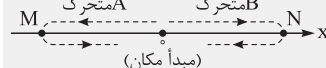
$$\Delta y' = -\frac{1}{2}gt'^2 \xrightarrow{t'=1/6 \text{ s}} \Delta y' = -\frac{1}{2} \times 10 \times (1/6)^2 = -5/18 \text{ m}$$

پس اگر 5 m از ارتفاع $12/8 \text{ m}$ پایین بیاییم، به جواب تست می‌رسیم:

$$y' = 12/8 - 5/18 = 7/8 \text{ m}$$

۴۹- گزینه ۲

شفاف‌سازی اول این که با توجه به نمودار، سرعت اولیه متحرک A منفی ($v_A < 0$) و سرعت اولیه متحرک B مثبت ($v_B > 0$) است و از آن‌جا که صورت سؤال گفته دو متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان می‌گذرند، پس می‌توانیم بگوییم در مبدأ زمان متحرک A در جهت منفی و متحرک B در جهت مثبت از مبدأ گذشته‌اند و ابتدا از هم دور شده‌اند. دوم این که هر دو نمودار سرعت - زمان در لحظه $t = 1 \text{ s}$ محور t را قطع کرده‌اند، پس سرعت هر دو متحرک، هم‌زمان در لحظه $t = 1 \text{ s}$ تغییر علامت داده‌اند؛ یعنی هر دو متحرک در لحظه $t = 1 \text{ s}$ تغییر جهت داده و پس از این لحظه به هم نزدیک شده‌اند، پس مسیر حرکت دو متحرک مانند شکل مقابل است.



بنابراین با توجه به فاصله نقاط تغییر جهت دو متحرک (N, M) از یکدیگر سه حالت رخ می‌دهد:

الف) اگر فاصله MN بیش از 150 m باشد، فاصله دو متحرک از یکدیگر ۳ بار برابر با 150 m می‌شود (دو بار هنگام دورشدن از هم و یک بار هنگام نزدیک شدن به هم).

ب) اگر فاصله MN برابر 150 m باشد، فاصله دو متحرک ۲ بار برابر 150 m می‌شود (یک بار در لحظه تغییر جهت و یک بار هنگام دورشدن از هم پس از لحظه تغییر جهت).

پ) اگر فاصله MN کم‌تر از 150 m باشد، فاصله آن‌ها ۱ بار برابر 150 m می‌شود (هنگام دورشدن از هم پس از لحظه تغییر جهت).

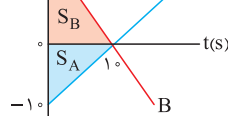
درس نامه

مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور t بیانگر مسافتی است که متحرک پیموده است: $S =$ مسافتی که متحرک در مدت t' پیموده است

با محاسبه مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان دو متحرک در بازه زمانی صفر تا 1 s ، فاصله نقاط تغییر جهت دو متحرک را حساب می‌کنیم:

$$MN = S_B + S_A = \frac{20 \times 10}{2} + \frac{10 \times 10}{2} = 150 \text{ m}$$

بنابراین فاصله دو متحرک از یکدیگر دو بار برابر 150 m می‌شود. یک بار در لحظه $t = 1 \text{ s}$ و یک بار پس از این لحظه.



۵۴- گزینه ۱

- درس نامه ۱** بزرگی شتاب نوسانگر در وضع تعادل (مرکز نوسان) صفر و در نقطه‌های بازگشت (مکان‌های A و $-A$) بیشینه است.
- ۲** در مدتی که نوسانگر به وضع تعادل (مبدأ) نزدیک می‌شود، حرکت تندشونده و هرگاه در حال دور شدن از مبدأ است، حرکت کندشونده است.
- ۳** در مکان‌های منفی (بین مرکز نوسان و نقطه $-A$) شتاب در جهت مثبت و در مکان‌های مثبت (بین مرکز نوسان و نقطه A) شتاب در جهت منفی است.
- با توجه به درس‌نامه، **۱** درست است.

۵۵- گزینه ۲

- درس نامه** بین طول موج، بسامد و تندی موج‌های الکترومغناطیسی رابطه زیر برقرار است:
- $$\lambda = \frac{c}{f}$$

گام ۱ همین‌طور که در شکل مشخص است، فاصله $\frac{3\lambda}{2}$ برابر 300 cm است؛ پس داریم:

گام ۲ حالا می‌توانیم بسامد را حساب کنیم (می‌دانید که هر مگاهرتز معادل 10^6 Hz است):

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{2} = 1.5 \times 10^8 \text{ Hz} = 150 \text{ MHz}$$

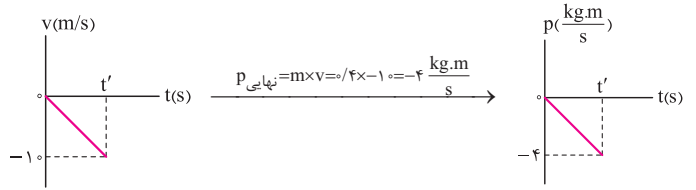
۵۶- گزینه ۳

- گام ۱** هرگاه پرتو نوری از محیطی با ضریب شکست بیشتر (مثل شیشه) وارد محیطی با ضریب شکست کمتر (مثل هوا) شود، زاویه شکستش از زاویه تابش بزرگتر است ($\theta_r > \theta_i$)؛ بنابراین گزینه درست یا **۱** است یا **۳**.
- گام ۲** ضریب شکست شیشه برای نور آبی بزرگتر از ضریب شکست شیشه برای نور قرمز است؛ بنابراین در عبور این دو پرتو از شیشه به هوا، پرتو آبی انحراف بیشتری پیدا می‌کند و **۳** درست است.

۵۷- گزینه ۳

- بررسی گزینه‌ها:**
- ۱:** طبق رابطه $W_e = hf$ ، هر چه تابع کار فلزی بیشتر باشد، بسامد آستانه آن هم بیشتر است. در واقع هر چه تابع کار بیشتر باشد، باید انرژی و در نتیجه بسامد فوتون تابشی برای جدا کردن الکترون از سطح فلز بیشتر شود. **×**
- ۲:** طبق رابطه $K_{\max} = hf - W_e$ ، با افزایش بسامد نور فرودی (f)، انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد. **×**
- ۳:** این عبارت درست است. **✓**
- ۴:** بلندترین طول موجی که سبب گسیل فوتوالکترون‌ها از یک فلز می‌شود، طول موج آستانه آن فلز نامیده می‌شود. **×**

گام ۲ رسم نمودار تکانه - زمان از روی نمودار سرعت - زمان:

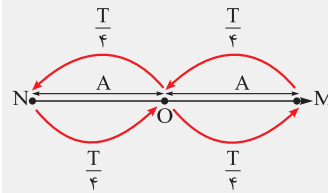


با توجه به گزینه‌ها، فقط **۲** می‌تواند درست باشد، اما اگر لازم بود می‌توانستیم زمان حرکت را هم به دست بیاوریم:

تیزبازی اگر تصاعد 5 m ، 15 m ، 25 m و ... را بلد باشید، حتماً بدون محاسبه می‌دانیم که گلوله مسافت 5 m را در مدت 1 s پیموده و اندازه سرعت نهایی آن 10 m/s و بزرگی تکانه نهایی آن $\frac{kg.m}{s}$ $4 \times 10 = 40$ است.

۵۳- گزینه ۳

- درس نامه ۱** با داشتن معادله مکان - زمان نوسانگر و مقایسه آن با رابطه $x = A \cos \omega t$ ، می‌توانیم دامنه (A) و دوره (T) نوسانگر را معلوم کنیم.
- $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
- ۲** با توجه به شکل زیر نوسانگری که حرکتش را از نقاط بازگشت (N یا M) شروع کرده است، هر $\frac{T}{4}$ مسافت A را می‌پیماید.



- ۳** تندی نوسانگر در نقاط بازگشت M و N برابر با صفر و در هنگام عبور از وضع تعادل (نقطه O) بیشینه و برابر $v_{\max} = A\omega$ است.

گام ۱ تعیین دامنه و دوره نوسان:

$$\begin{cases} x = A \cos 2\pi t \\ x = A \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0.05 \text{ m} \\ \omega = 2\pi \text{ rad/s} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{1}{1} \text{ s} \end{cases}$$

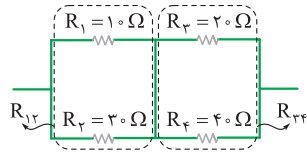
گام ۲ مدت صفر تا $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ چند برابر T است؟

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{4}$$

یعنی مطابق شکل نوسانگر تا لحظه $t = \frac{1}{8} \text{ s}$ ، $t = \frac{T}{4}$ گذرانده و در حال عبور از مبدأ است؛ پس در این لحظه تندی و انرژی جنبشی آن بیشینه است و داریم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{v=v_{\max}=A\omega} K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \xrightarrow{m=1.2 \times 10^{-2} \text{ kg}, A=0.05 \text{ m}, \omega=2\pi \text{ rad/s}} K = \frac{1}{2} \times 1.2 \times 10^{-2} \times (0.05 \times 2\pi)^2 = 6\pi^2 \times 10^{-2} \text{ J} = 60\pi^2 \text{ mJ}$$

گام ۳ مقاومت‌های R_1 و R_2 با هم و مقاومت‌های R_3 و R_4 نیز با هم موازی‌اند، در نتیجه می‌توان نوشت:



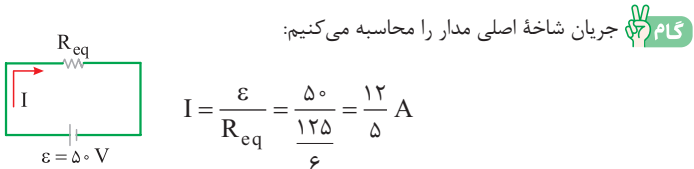
$$R_{\text{موازی}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{12} = \frac{10 \times 20}{10 + 20} = \frac{10}{3} \Omega$$

$$R_{34} = \frac{30 \times 40}{30 + 40} = \frac{12}{7} \Omega$$

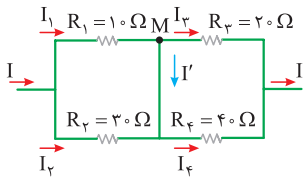
مقاومت‌های R_{12} و R_{34} متوالی‌اند:

$$R_{eq} = R_{12} + R_{34} = \frac{10}{3} + \frac{12}{7} = \frac{40}{21} \Omega$$



$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{50}{\frac{40}{21}} = \frac{105}{4} A$$

گام ۴ جریان شاخه اصلی مدار را محاسبه می‌کنیم:



$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow 10 I_1 = 30 I_2 \Rightarrow I_1 = 3 I_2$$

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{105}{4} = I_1 + \frac{1}{3} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{9}{8} A$$

به همین روش جریان گذرنده از R_3 را به دست می‌آوریم:

$$V_3 = V_4 \Rightarrow R_3 I_3 = R_4 I_4 \Rightarrow 30 I_3 = 40 I_4 \Rightarrow I_3 = \frac{4}{3} I_4$$

$$I = I_3 + I_4 \Rightarrow \frac{105}{4} = I_3 + \frac{3}{4} I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{6} A$$

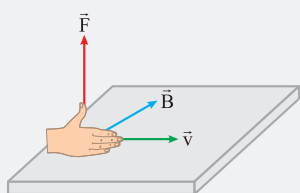
گام ۵ با نوشتن قاعده انشعاب در (نقطه M)، جریان گذرنده از آمپرستج (I') را محاسبه می‌کنیم:

$$M \Rightarrow \text{مجموع جریان‌های خروجی از } M = \text{مجموع جریان‌های ورودی به } M \\ \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{6} + I' \Rightarrow I' = \frac{1}{24} A \xrightarrow{\times 1000} I' = 4.17 \text{ mA}$$

مشاوره این تست یک تست بسیار معروف و پرتکرار در کنکور است؛ بنابراین توصیه ما به شما این است که به تکتک مراحل حل این تست، را تسلط کامل داشته باشید.

۶۷- گزینه ۴

درس‌نامه قاعده دست راست برای تعیین جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی؛ طبق این قاعده، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد (شکل بالا را ببینید).



۶۴- گزینه ۲

درس‌نامه توان خروجی باتری: اختلاف پتانسیل دو سرباتری $\rightarrow I V = P$ خروجی
جریان عبوری از باتری

$$P_{\text{خروجی}} = IV = 1/5 \times 6 = 9 \text{ W}$$

توان خروجی باتری برابر است با:

۶۵- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ رابطه مقاومت الکتریکی یک رسانا: طول رسانا $\rightarrow R = \rho \frac{L}{A}$

مساحت مقطع رسانا $\rightarrow A$
مقاومت ویژه رسانا

۲ اگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر با V باشد، توان مصرفی این مقاومت از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

گام ۱ اگر قطر اولیه سیم (d_1) را ۱۰۰ واحد فرض کنیم، پس از یک درصد کاهش قطر، قطر ثانویه به ۹۹ واحد می‌رسد:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{99}{100}, A = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \left(\frac{99}{100}\right)^2 \quad (I)$$

$$R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{\text{طول ثابت}} \frac{R_1}{R_2} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \xrightarrow{(I)} \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{99}{100}\right)^2 \quad (II)$$

$$P = \frac{V^2}{R} \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2}{R_1} \xrightarrow{(II)} \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{99}{100}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} \approx 0.98 \Rightarrow P_2 \approx 0.98 P_1$$

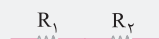
درصد تغییرات توان را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{\Delta P}{P_1} \times 100 = \frac{-0.02 P_1}{P_1} \times 100 = -2\%$$

در نتیجه توان مصرفی ۲ درصد کاهش می‌یابد.

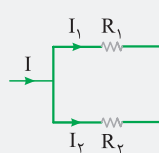
۶۶- گزینه ۳

درس‌نامه ۱ مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

مقاومت معادل این دو مقاومت:



۲ مطابق شکل روبه‌رو، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی به هم متصل‌اند:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مقاومت معادل این دو مقاومت:

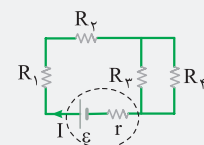
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

نسبت جریان عبوری از مقاومت‌ها برابر با وارون نسبت مقاومت‌ها است:

$$I = I_1 + I_2$$

اصل پایستگی بار الکتریکی:

۳ جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در شکل روبه‌رو از رابطه زیر به دست می‌آید:

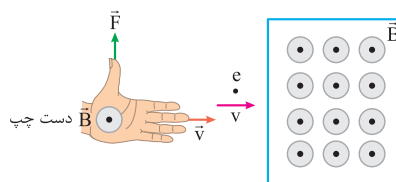


$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

با توجه به شکل مقابل و به کمک دست چپ، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر الکترون هنگام ورود به ناحیه میدان مغناطیسی، به سمت بالای صفحه است.



تله در صورت عدم توجه به بار منفی الکترون و استفاده از دست راست، به گزینه اشتباه (۳) می‌رسید.

۶۸- گزینه ۱

درس نامه اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان در میدان مغناطیسی
 یکنواخت: $F = BIL \sin \theta$ (طول بخش از سیم که در

$F = I \ell B \sin \theta \rightarrow$
 زاویه بین راستای سیم
 (جهت جریان الکتریک) و جهت میدان مغناطیسی

بزرگی میدان مغناطیسی جریان عبوری

اندازه نیروی مغناطیسی، وارد بر سیم برابر است با:

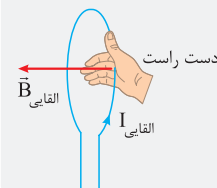
$$F = I \ell B \sin \theta \xrightarrow{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \times v}{r^3}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^3} \sin^2 \theta$$

۶۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ قانون لنز: با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه (یا پیچه یا سیم‌لوله)، میدان مغناطیسی القا می‌شود که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

جهت میدان مغناطیسی القایی	چگونگی تغییر شار مغناطیسی
در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی	افزایش
هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی	کاهش

۲) قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی:



اگر چهار انگشت دست راست را در جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه قرار دهیم، شست دست جهت جریان القایی در حلقه را نشان می‌دهد (شکل مقابل):

تیزبازی برای حلقهٔ (۳) اتفاقی برعکس حلقهٔ (۱) در حال رخدادن است، یعنی شار مغناطیسی عبوری از آن در حال افزایش است؛ بنابراین جریان القایی در این حلقه هم باید برعکس حلقهٔ (۱) یعنی ساعتگرد باشد، جواب (۴) است.

گام ۳۶ در لحظه نشان داده شده، حلقه (۲) در ناحیه وسط آهنربا قرار دارد و خطوط میدان مغناطیسی عبوری از این حلقه تقریباً قائم یعنی بدون واگرایی یا همگرایی است. در نتیجه اندازه میدان مغناطیسی در محل این حلقه (تراکم خطوط میدان مغناطیسی عبوری از حلقه) تغییر نمی‌کند؛ بنابراین شار مغناطیسی عبوری از حلقه ثابت است و جریان القایی در این حلقه صفر است.

کام ۷ در لحظه نشان داده شده، قطب آهنربا در حال نزدیک شدن به حلقه (۳) است؛ بنابراین اندازه میدان مغناطیسی آهنربا در محل حلقه (تراکم خطوط میدان مغناطیسی عبوری از حلقه) در حال افزایش و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال افزایش است، بنابراین طبق قانون لنز، حلقه با این افزایش شار مخالف می‌کند و میدان مغناطیسی القایی درون حلقه در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی، یعنی به طرف پایین است. به کمک قاعده دست راست، جریان القایی، در حلقه برای ناظری که در بالای حلقه قرار دارد، در جهت ساعتگرد است.

۷۰ - گزینه ۴

درس نامه قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکه القایی متوسط در این مدار از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

بزرگی میدان مغناطیسی

زاویه بین بردار میدان مغناطیسی و نیم خط عمود بر سطح حلقه

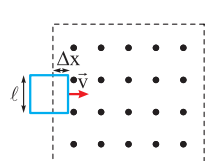
$$\Phi = BA \cos \theta \rightarrow \varepsilon_{av} = -N B \frac{\Delta A}{\Delta t} \cos \theta \rightarrow$$

فقط مساحت تغییر کند. تعداد حلقه ها آهنگ تغییر مساحت حلقه

۴۴ به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، رابطه کلی نیروی محرکه القایی ایجادشده را برای حلقه‌ای مانند آن‌چه در صورت تست آمده، به دست می‌آوریم:

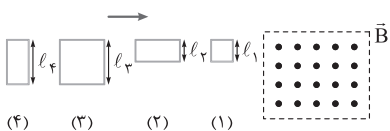
$$\begin{aligned} |\varepsilon_{av}| &= |-NB \frac{\Delta A}{\Delta t} \cos \theta| \xrightarrow[\theta=0^\circ]{N=1} \varepsilon_{av} = B \frac{\ell \Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{\Delta x}{\Delta t}=v} \\ \varepsilon_{av} &= B \ell v \xrightarrow[\varepsilon_{av}=\varepsilon]{\text{سرعت حلقه ها ثابت است.}} \varepsilon = B \ell v \end{aligned}$$

در رابطه به‌دست‌آمده، منظور از ℓ طول ضلعی از حلقه است که عمود بر میدان مغناطیسی و سرعت (جهت حرکت) حلقه است.



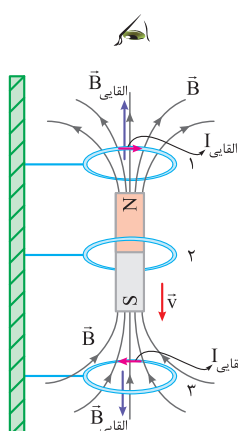
بر اساس رابطه $\varepsilon = B\ell v$ و با توجه به یکسان بودن B و v برای حلقه‌ها، نیروی محرکه القایی ایجادشده در حلقه‌ها هنگام ورود به ناحیهٔ میدان مغناطیسی یکنواخت (که همان نیروی محرکهٔ القایی بیشینه است)، فقط به ℓ بستگی دارد. با توجه به شکل زیر:

$$l_f = l_3 > l_2 = l_1 \Rightarrow \varepsilon_f = \varepsilon_3 > \varepsilon_2 = \varepsilon_1$$



۷۱- گزینه ۱

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (A: \text{مساحت مقطع لوله و } v: \text{تندی شار})$$

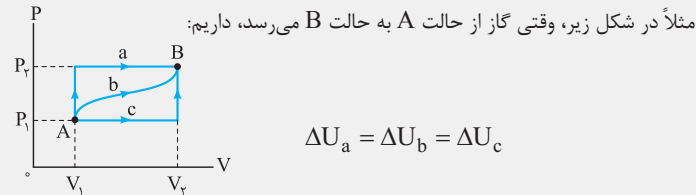


گام ۱ در لحظه نشان داده شده، قطب آهنربا در حال دور شدن از حلقه (۱) است؛ بنابراین اندازه میدان مغناطیسی در محل حلقه (تراکم خطوط میدان مغناطیسی عبوری از حلقه) در حال کاهش و در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال کاهش است؛ بنابراین طبق قانون لنز، حلقه با این کاهش شار مخالفت می‌کند و میدان مغناطیسی القایی درون حلقه هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی، یعنی به طرف بالا است. به کمک قاعده دست راست، جریان القایی در حلقه برای ناظری که در بالای حلقه قرار دارد، در جهت پادساعتگرد است.

۷۴- گزینه ۲

درس نامه

تغییر انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل در طی یک فرایند فقط به حالت‌های اولیه و پایانی فرایند مربوط است و به مسیر فرایند بستگی ندارد.



کار انجام‌شده روی گاز و همچنین گرمای مبادله‌شده بین مقدار معینی گاز کامل و محیط به مسیر فرایند بستگی دارند، اما تغییر انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل مطابق آن‌چه در درس‌نامه گفته شد، به مسیر فرایند مربوط نیست.

۷۵- گزینه ۲

درس نامه ۱ برای مقدار معینی گاز کامل بین دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

فشار مطلق = P حجم = V دمای مطلق = T (K)

در طرفین رابطه فوق یکاهای فشار و حجم باید یکسان به کار روند، اما یکای دما علاوه بر یکسان بودن باید حتماً برحسب کلونین باشد.

$$T = \theta + 273$$

دما ($^{\circ}\text{C}$)

۲ در کاربرد قانون گازهای کامل باید از فشار مطلق استفاده کنیم:

فشار هوای محیط

$$P = P_0 + P_g$$

فشار مطلق فشار پیمانه‌ای گاز

۱ با توجه به این‌که حجم گاز ثابت می‌ماند، داریم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

$$P_1 = P_0 + P_{g1} = P_0 = 75 + 0 = 75 \text{ cmHg}$$

$$T_1 = \theta_1 + 273 = 0 + 273 = 273 \text{ K}$$

$$P_2 = P_0 + P_{g2} = 75 + 10 = 85 \text{ cmHg}$$

۲ مقادیر به‌دست‌آمده را در رابطه فوق جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{75}{273} = \frac{85}{T_2} \Rightarrow T_2 = 309 / 4 \text{ K}$$

۳ دمای گاز در حالت دوم را برحسب درجه سلسیوس می‌نویسیم:

$$T_2 = \theta_2 + 273 \Rightarrow 309 / 4 = \theta_2 + 273 \Rightarrow \theta_2 = 36 / 4 ^{\circ}\text{C}$$

شیمی

۷۶- گزینه ۲

در لایه چهارم ($n=4$) اتم $^{78}_{34}\text{Se}$ ۶ الکترون وجود دارد.

$$^{78}_{34}\text{Se} : [1s] 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$$

طبق خواسته سؤال، عنصر مورد نظر باید ۳ الکترون ظرفیتی داشته باشد.

روش ۱ آرایش الکترونی اتم‌ها را رسم می‌کنیم و شمار الکترون‌های ظرفیتی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

۱ $^{20}_{18}\text{Ar} : [1s] 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 \Rightarrow$ الکترون‌های ظرفیتی = ۲ × لایه ظرفیت

۲ $^{31}_{18}\text{X} : [1s] 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 \Rightarrow$ الکترون‌های ظرفیتی = ۳ ✓ لایه ظرفیت

۱ قطر مقطع قسمت باریک رگ (d_1) نسبت به قطر مقطع قسمت گشاد آن (d_2)، ۴۰ درصد کم‌تر است.

می‌توانیم نسبت مساحت‌های این دو مقطع را به دست آوریم:

$$A = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \xrightarrow{d_1=0.6d_2} \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{0.6d_2}{d_2}\right)^2 = 0.36$$

۲ معادله پیوستگی را برای دو مقطع مختلف رگ می‌نویسیم و تغییر تندی خون را محاسبه می‌کنیم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} = 0.36 \Rightarrow v_2 = 0.36 v_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 0.36 v_1 - v_1 = -0.64 v_1$$

$$\frac{\Delta v}{v_1} \times 100 = \frac{-0.64 v_1}{v_1} \times 100 = -64\%$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تندی کاهش یافته است.

۷۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ در بارومتر شکل روبه‌رو، با نوشتن اصل هم‌فشاری برای نقاط هم‌تراز A و B می‌توان فشار گاز محبوس را به دست آورد:

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

۲ محاسبه فشار پیمانه‌ای یک مایع دلخواه (P_g) برحسب سانتی‌متر جیوه:

$$P_g = \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} \times h_{\text{مایع (cm)}}$$

۱ فشار ستون مایع درون لوله را برحسب سانتی‌متر جیوه می‌نویسیم:

$$P_g = \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} \times h_{\text{مایع}} = \frac{2/8 \text{ g/cm}^3 \times 51 \text{ cm}}{13/6 \text{ g/cm}^3} \Rightarrow P_g = \frac{2/8}{13/6} \times 51 = 10/5 \text{ cmHg}$$

۲ فشار هوای جمع‌شده در انتهای لوله را حساب می‌کنیم:

$$P_A = P_0 \Rightarrow P_0 = P_{\text{atm}} + P_g$$

$$\Rightarrow 75/5 = P_{\text{atm}} + 10/5$$

$$\Rightarrow P_{\text{atm}} = 65 \text{ cmHg}$$

۳ فشار به‌دست‌آمده را برحسب پاسکال می‌نویسیم:

$$P = \rho_{\text{جیوه}} gh = 13600 \times 10 \times \frac{65}{100} = 88400 \text{ Pa}$$

۷۳- گزینه ۳

درس نامه برای جسمی که بدون تغییر حالت در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

تغییر دما ($^{\circ}\text{C}$)

$$Q = m c \Delta \theta$$

گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم

گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم

گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم گرمای ویژه جرم

براساس رابطه $Q = mc\Delta\theta$ ، گرمای ویژه را برای هر یک از سه ماده A، B و C به دست می‌آوریم و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$c_A = \frac{Q_A}{m_A \Delta \theta_A} = \frac{1800}{2 \times 2} = 450 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$c_B = \frac{Q_B}{m_B \Delta \theta_B} = \frac{1200}{1 \times 2} = 600 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$c_C = \frac{Q_C}{m_C \Delta \theta_C} = \frac{3000}{1/5 \times 4} = 500 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده داریم:

طول موج پرتو نشرشده ↓ → انرژی پرتو نشرشده ↑ → تفاوت انرژی بین لایه‌های الکترونی ↑
بررسی سایر گزینه‌ها:
 ۱) کربن (C) و کلر (Cl) هر دو نافلزند و برای رسیدن به آرایش گاز نجیب، الکترون به اشتراک می‌گذارند. (مبادله نمی‌کنند)

۲) **تله** اگر در ۱) به جای واژه «مبادله الکترون» از «اشتراک الکترون» استفاده می‌شد، این عبارت کاملاً درست بود؛ بنابراین اگر دقت کافی نداشته باشی و همه گزینه‌ها رو بررسی نکنی، ۱) می‌تونه خیلی راحت و شیک، تو رو تو دام بندازه!

۳) **نکته** شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از ترکیب یونی برابر است با:

$$\text{شمار (زیروند)} \times \text{قدرمطلق} = \text{شمار (زیروند)} \times \text{بار} = \text{شمار e مبادله‌شده آنیون} \times \text{بار آنیون}$$

اگر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو ترکیب یونی برابر باشد، لزوماً بار الکتریکی کاتیون‌ها یا آنیون‌های آن‌ها برابر نیست! برای مثال شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو ترکیب Na_2S و MgCl_2 با هم برابر است اما بار الکتریکی کاتیون‌ها یکسان نیست.

$$2 \times 2 = 4 = \text{شمار کاتیون} \times \text{بار کاتیون} = \text{شمار e مبادله‌شده در تشکیل Na}_2\text{S}$$

$$2 \times 1 = 2 = \text{شمار کاتیون} \times \text{بار کاتیون} = \text{شمار e مبادله‌شده در تشکیل MgCl}_2$$

۴) در هر اتم، انرژی لایه‌های الکترونی و تفاوت انرژی میان آن‌ها به عدد اتمی (شمار پروتون‌های اتم) وابسته است. با توجه به این‌که هر عنصر عدد اتمی منحصره‌فردی دارد، بنابراین پرتوهای گسیل‌شده از دو لایه یکسان در دو عنصر گوناگون، انرژی متفاوتی دارند.

۷۸- گزینه ۱

عنصر Y در دوره سوم جدول دوره‌ای جای دارد و آرایش الکترونی آخرین زیرلایه آن می‌تواند یکی از حالت‌های $3p^1$ تا $3p^6$ باشد.

اگر Y را آلوتروپ یا دگرشکل فسفر سفید (P_{15}) که جامدی سفیدرنگ بوده و دارای آخرین زیرلایه $3p^3$ ($[\text{Ne}]3s^2 3p^3$) است در نظر بگیریم، عنصر X همان ^{23}V ($[\text{Ar}]3d^3 4s^2$) خواهد بود که در بیرونی‌ترین زیرلایه آن ۲ الکترون ($4s^2$) جای دارد نه یک الکترون!

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) اگر X منگنز (Mn_{25}) با زیرلایه $3d^5$ ($[\text{Ar}]3d^5 4s^2$) باشد، عنصر Y همان کلر (Cl_{17}) ($[\text{Ne}]3s^2 3p^5$) خواهد بود که در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۳) اگر Y فسفر (P_{15}) با آخرین زیرلایه $3p^3$ ($[\text{Ne}]3s^2 3p^3$) باشد، عنصر X همان ^{23}V ($[\text{Ar}]3d^3 4s^2$) است. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد اکسایش ^{23}V ، به ترتیب برابر با +۵ و ۰ است.

۴) **نکته** دامنه تغییرات عدد اکسایش برخی فلزهای واسطه جدول به صورت زیر است:

عنصر	^{23}V	^{24}Cr	^{25}Mn	^{26}Fe	^{29}Cu
بالاترین عدد اکسایش	+۵	+۶	+۷	+۳	+۲
پایین‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	۰	۰	۰

۴) اگر Y گاز نجیب دوره سوم (Ar_{18}) با آخرین زیرلایه $3p^6$ ($[\text{Ne}]3s^2 3p^6$) باشد، عنصر X همان ^{26}Fe ($[\text{Ar}]3d^6 4s^2$) خواهد بود که در لایه سوم آن ۱۴ الکترون ($3s^2 3p^6 3d^6$) وجود دارد.

مشاوره این سؤال به نمونه از سؤال‌های ترکیبی تحلیلی! با توجه به این‌که سهم سؤال‌های تحلیلی در کنکورهای اخیر زیاد شده، بهتون توصیه می‌کنیم که هر جا توی کتاب‌ها، آزمون‌ها و ... این مدل سؤال‌ها رو دیدید، اول دانش خودتون رو محک بزنید و بعدش حتماً پاسخ سؤال رو بخونید تا بتونید مهارتتون رو در این مدل تست‌ها بالا ببرید.

۷۹- گزینه ۳

۵) **نکته** در مسائل مقایسه‌ای مول، برای سرعت و راحتی بیشتر، باید به جای عدد آووگادرو در محاسبات، نماد آن (N_A) را قرار دهید.

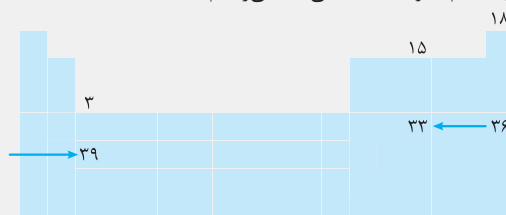
$$x \times 4 = \text{الکترون‌های ظرفیتی} \Rightarrow [1s^2 2s^2 2p^2] : [1s^2 2s^2 2p^2] \text{ D}_{14} \text{ لایه ظرفیت}$$

$$x \times 5 = \text{الکترون‌های ظرفیتی} \Rightarrow [1s^2 2s^2 2p^2] / [3d^1] : [1s^2 2s^2 2p^2] \text{ M}_{33} \text{ لایه ظرفیت}$$

روش عنصری با ۳ الکترون ظرفیتی متعلق به گروه $(n-1)d^1 ns^2$ یا گروه ۱۳ ($ns^2 np^1$) جدول دوره‌ای است. می‌توانیم به کمک عدد اتمی گازهای نجیب، بدون رسم آرایش الکترونی عناصر، جایگاه و شماره گروه آن‌ها را در جدول پیدا کرده و به پاسخ برسیم.

۶) **نکته** برای عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲، تعداد الکترون‌های ظرفیتی با شماره گروه و برای عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به جز He)، تعداد الکترون‌های ظرفیتی با عدد یکان شماره گروه عنصر، برابر است.

۷) **نکته** تعیین شماره گروه عناصر با استفاده از عدد اتمی گازهای نجیب: برای تعیین شماره گروه یک عنصر، می‌توانیم از نزدیک‌ترین گاز نجیب به آن کمک بگیریم. مثلاً عنصری با عدد اتمی ۳۳ در گروه ۱۵ قرار دارد! زیرا عدد اتمی آن ۳ واحد کم‌تر از گاز نجیب ^{36}Kr که در گروه ۱۸ قرار دارد، است. یا مثلاً عنصری با عدد اتمی ۳۹، متعلق به گروه ۳ است، زیرا گاز نجیب با عدد اتمی ۳۶ در انتهای دوره چهارم و گروه ۱۸ قرار دارد و بعدش اگر ۳ خانه در دوره بعدی بپاییم جلو، به عدد اتمی ۳۹ می‌رسیم!



به صورت فرمولی هم می‌شه به قضیه نگاه کرد. برای تعیین شماره گروه به کمک گازهای نجیب، سه حالت پیش می‌آید:

۱) اگر عدد اتمی عنصر مورد نظر یک یا دو واحد بیشتر از عدد اتمی یکی از گازهای نجیب باشد، در این حالت شماره گروه برابر با تفاوت عدد اتمی عنصر با گاز نجیب دوره قبل است (شماره گروه برابر ۱ یا ۲ می‌باشد).

۲) عنصرهایی که در دو ردیف در پایین جدول قرار دارند (عنصرهایی با عدد اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲) را می‌توان متعلق به گروه ۳ دانست.

۳) برای بقیه عناصر که عدد اتمی آن‌ها بیش از دو واحد از عدد اتمی گاز نجیب قبل از خود بیشتر است، باید اختلاف عدد اتمی عنصر و گاز نجیب هم‌دوره‌اش را از عدد کم کنیم تا شماره گروه به دست آید.

$$[(\text{عدد اتمی عنصر}) - (\text{عدد اتمی گاز نجیب هم‌دوره عنصر})] = 18 - 23 = -5 \Rightarrow \text{شماره گروه} = 18 - (-5) = 23$$

مثال: $^{23}\text{A} \rightarrow \text{شماره گروه} = 18 - (23 - 23) = 18 - 0 = 18$ گاز نجیب هم‌دوره

بررسی گزینه‌ها: ۱) عدد اتمی ^{29}A ، ۲ واحد بیشتر از گاز نجیب Ar_{18} است و در گروه ۲ قرار دارد؛ پس دارای ۲ الکترون ظرفیتی است. x

۲) عدد اتمی ^{31}X ، ۵ واحد کم‌تر از گاز نجیب Kr_{36} است و در گروه ۱۳ قرار دارد؛ پس دارای ۳ الکترون ظرفیتی است. ✓

۳) عدد اتمی ^{44}D ، ۴ واحد کم‌تر از گاز نجیب Ar_{18} است و در گروه ۱۴ قرار دارد؛ پس دارای ۴ الکترون ظرفیتی است. x

۴) عدد اتمی ^{33}M ، ۳ واحد کم‌تر از گاز نجیب Kr_{36} است و در گروه ۱۵ قرار دارد؛ پس دارای ۵ الکترون ظرفیتی است. x

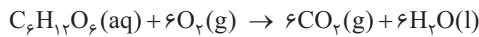
۷۷- گزینه ۴

هر چه فاصله میان لایه‌های الکترونی در اتم‌ها بیشتر باشد (تفاوت انرژی لایه‌ها بیشتر باشد)، طول موج پرتوی گسیل‌شده کوتاه‌تر خواهد بود و بالعکس.

۱- در این جا منظور طراح محترم از فاصله میان لایه‌های الکترونی، همان تفاوت سطح انرژی میان لایه‌هاست. بر نیست بدانکه با فاصله گرفتن از هسته اتم، انرژی لایه‌ها به هم نزدیک‌تر می‌شود اما فاصله آن‌ها از یکدیگر بیشتر می‌شود. در شکل‌های کتاب درسی در مورد لایه‌های الکترونی اتم هیدروژن هم، تفاوت انرژی لایه‌ها نشان داده شده است و شکل‌ها هیچ ربطی به فاصله لایه‌های (شعاع لایه‌های) پیرامون هسته اتم ندارد.

۸۱- گزینه ۴

گام ۱: معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام ۲: جرم گاز CO_2 آزاد شده به ازای مصرف 45° گرم گلوکز در یک روز را حساب می‌کنیم:

روش: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{C_6H_{12}O_6} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{CO_2} \Rightarrow \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{x}{6 \times 44} \Rightarrow x = 660 \text{ g } CO_2$$

روش: استفاده از کسر تبدیل:

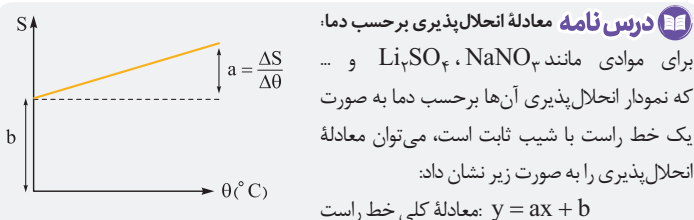
$$45^\circ \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{6 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 660 \text{ g } CO_2$$

گام ۳: رد پای کربن دی‌اکسید ایجاد شده توسط این فرد به صورت روزانه 660 g است؛ پس رد پای کربن دی‌اکسید ایجاد شده در یک سال (365 روز) برابر $660 \times 365 \text{ g}$ کربن دی‌اکسید است.

حالا باید حساب کنیم چند درخت برای از بین بردن این مقدار کربن دی‌اکسید لازم است:

$$660 \times 365 \text{ g } CO_2 \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ درخت}}{22 \text{ kg}} = 10.95 = 11 \text{ درخت}$$

۸۲- گزینه ۱



$$a = \frac{\Delta S}{\Delta \theta} = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

همان‌طور که در درس ریاضی خوانده‌اید، اگر دو نقطه از یک خط را داشته باشیم، می‌توانیم معادله خط را به صورت زیر نشان دهیم:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$S - S_1 = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1} (\theta - \theta_1)$$

معادله انحلال پذیری بر حسب دما

$$\left(\begin{matrix} \text{نقطه اول: } (\theta_1, S_1) \\ \text{نقطه دوم: } (\theta_2, S_2) \end{matrix} \right)$$

استراتژی اول با توجه به اطلاعات داده شده، انحلال پذیری نمک (بیشترین مقدار نمک که در 100° گرم آب حل می‌شود) را در دماهای 100°C و 10°C به دست بیار، بعد با داشتن مختصات دو نقطه، معادله انحلال پذیری را بنویس.

گام ۱: محاسبه انحلال پذیری در دمای 10°C :

در 27° گرم محلول سیر شده در این دما، 7° گرم نمک و در نتیجه 2° گرم آب وجود دارد. با توجه به تعریف انحلال پذیری (بیشترین مقدار یک ماده بر حسب گرم که در 100° گرم آب حل می‌شود)، انحلال پذیری لیتیم سولفات در دمای 10°C برابر است با:

$$S(10^\circ \text{C}) = 100 \text{ g آب} \times \frac{7 \text{ g نمک}}{27 \text{ g آب}} = 25.9 \text{ g نمک}$$

خب! از اون جایی که عرض از مبدأ در معادله انحلال پذیری (b)، مقدار انحلال پذیری را در دمای 10°C نشان می‌دهد، عرض از مبدأ معادله برابر با 25.9 است. پس تا این جا (۲) و (۴) پُر!

گام ۲: برای قسمت اول سؤال، ابتدا شمار اتم‌ها در $1/2^\circ$ مول گاز آمونیاک (NH_3) را حساب می‌کنیم. حواستون باشه که هر مول NH_3 شامل 4° مول اتم است.

روش: استفاده از کسر تناسب:

$$1 \text{ mol } NH_3 \sim 4 \text{ atom} \Rightarrow \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{مول}} = \frac{y}{4 \times N_A} \Rightarrow y = 0.8 N_A \text{ atom}$$

روش: استفاده از کسر تبدیل:

$$0.8 \text{ mol } NH_3 \times \frac{4 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol } NH_3} \times \frac{N_A \text{ atom}}{1 \text{ mol atom}} = 0.8 N_A \text{ atom}$$

گام ۳: حالا حساب می‌کنیم که در چند گرم متان (CH_4)، $0.8 N_A$ مولکول CH_4 وجود دارد.

روش: استفاده از فرمول:

$$\text{مول} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{عدد آووگادرو}} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{0.8 N_A}{N_A} \Rightarrow x = 12.8 \text{ g } CH_4$$

روش: استفاده از کسر تبدیل:

$$0.8 N_A \text{ } CH_4 \text{ مولکول} \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{N_A \text{ مولکول } CH_4} \times \frac{16 \text{ g } CH_4}{1 \text{ mol } CH_4} = 12.8 \text{ g } CH_4 = x$$

گام ۴: برای قسمت دوم سؤال باید حجم مخلوط گازی که شامل $1/2^\circ$ مول NH_3 و

$$1/2^\circ \text{ mol } CH_4 \text{ است را در شرایط STP حساب کنیم:}$$

$$\text{گاز } 22.4 \text{ L} \times \frac{22.4 \text{ L}}{1 \text{ mol گاز}} \times (0.5 + 0.5) = 22.4 \text{ L گاز}$$

۸۰- گزینه ۱

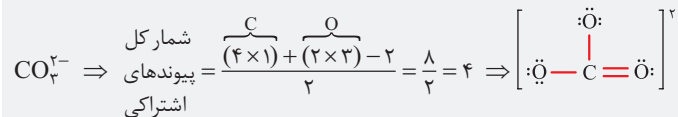
درس نامه رسم سریع ساختار لوویس گونه‌ها:

۱ ابتدا شمار کل پیوندهای اشتراکی در یک گونه را با فرمول زیر به دست می‌آوریم:

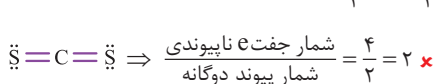
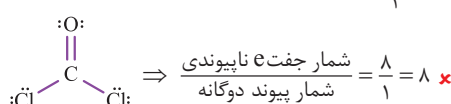
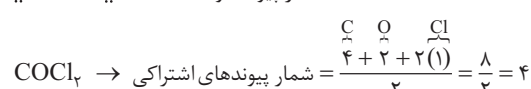
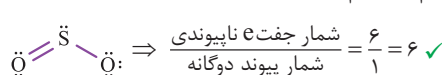
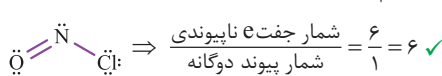
$$\text{شمار کل پیوندهای اشتراکی} = \frac{\left(\text{مجموع تعداد e های جفت نشده} \right) + \left(\text{در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم‌ها} \right)}{2}$$

۲ با توجه به نوع اتم، اتم مرکزی را با پیوندهای یگانه، دوگانه یا سه‌گانه به اتم‌های اطراف متصل می‌کنیم و با گذاشتن جفت الکترون‌های ناپیوندی، اتم‌ها (به جز H) را هشت‌تایی می‌کنیم.

مثال:



ساختار لوویس همهٔ مولکول‌ها را رسم کرده و نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندهای دوگانه در آن‌ها را به دست می‌آوریم:



۸۴- گزینه ۴

مینیمم سولفات ($\text{MgSO}_4(s)$) یک ترکیب یونی محلول در آب است که افزایش دما باعث افزایش انحلال پذیری آن می شود اما باریم سولفات ($\text{BaSO}_4(s)$) یک نمک نامحلول در آب است که انحلال پذیری آن در آب با افزایش دما تغییری نمی کند.

بررسی سایر گزینه ها: ۱) $\text{I}_2(s)$ دارای مولکول های ناقطبی است و در آب که حلالی قطبی است، حل نمی شود.

۲) اگر در ابتدا محلولی فراسیرشده داشته باشیم، پس نباید رسوبی در کنار آن در کف ظرف وجود داشته باشد! محلول فراسیرشده، محلولی ناپایدار است و با کوچک ترین تحریک مانند بودن در کنار یک بلور نمک، تمام یا بخشی از مقدار اضافه ماده حل شده در آن به صورت رسوب از محلول خارج می شود. در واقع وقتی که رسوب در تماس با محلول است بین آن ها تعادل برقرار می شود و تا زمانی که رسوب در ظرف وجود دارد، غلظت محلول نمی تواند بیشتر از حد اشباع (سیرشده) شود. به عبارتی رسوب اجازه نمی دهد محلول به حالت فراسیرشده برسد.

نکته محلول فراسیرشده: محلولی است که در یک دمای معین، مقدار ماده حل شونده موجود در آن، بیشتر از مقدار ماده حل شونده در محلول سیرشده است. به عبارت دیگر در محلول فراسیرشده، مقدار ماده حل شونده، بیشتر از مقدار انحلال پذیری آن ماده در همان دما است.

۳) کلسیم فسفات ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2(s)$) یک نمک نامحلول در آب است و با افزایش دما انحلال پذیری آن در آب تغییری نمی کند.

۸۵- گزینه ۱

نکته به هنگام رقیق سازی محلول ها با آب، فقط حجم محلول تغییر می کند و شمار مول های حل شونده ثابت است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{حجم محلول (V)} \times \text{غلظت مولی (M)} = \text{مول حل شونده (n)} \Rightarrow \frac{M_1 V_1}{\text{غلظت}} = \frac{M_2 V_2}{\text{رقیق}}$$

گام ۱ برای قسمت اول سؤال، با کاهش ۲۰ درصدی غلظت مولی محلول، غلظت آن از ۱ مولار به ۰/۸ = ۱ - ۲۰٪ مولار می رسد؛ بنابراین داریم:

$$\frac{M_1 V_1}{\text{غلظت}} = \frac{M_2 V_2}{\text{رقیق}} \Rightarrow \frac{1 \times 500}{\text{غلظت}} = \frac{0.8 \times V_2}{\text{رقیق}} \Rightarrow V_2 = 625 \text{ mL}$$

$$V_{\text{آب}} = V_2 - V_1 = 625 - 500 = 125 \text{ mL}$$

تا اینجا ۲ و ۴ پُر!

گام ۲ برای قسمت دوم سؤال ابتدا باید غلظت های مولی محلول های غلیظ و رقیق را به غلظت گرم بر لیتر آن ها تبدیل کنیم و بعد درصد کاهش غلظت محلول رو به دست بیاریم:

نکته فرمول غلظت معمولی (گرم بر لیتر) و تبدیل آن به غلظت مولار و بالعکس

$$\left. \begin{aligned} \text{جرم حل شونده (گرم)} \\ \text{حجم محلول (L)} \end{aligned} \right\} = \text{غلظت گرم بر لیتر (غلظت معمولی)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مول حل شونده} \\ \text{حجم محلول (L)} \end{aligned} \right\} = \text{غلظت مول بر لیتر (مولار)}$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \text{مول} \Rightarrow \frac{\text{جرم حل شونده (گرم)}}{\text{حجم محلول (L)} \times \text{جرم مولی}} = \text{غلظت مولار}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی}} = \text{غلظت مول بر لیتر (مولار)}$$

$$\frac{C}{\text{جرم مولی}} = \text{غلظت گرم بر لیتر (مولار)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 = \frac{C_1}{40} \Rightarrow C_1 &= 40 \text{ g.L}^{-1} \\ 0.8 = \frac{C_2}{40} \Rightarrow C_2 &= 32 \text{ g.L}^{-1} \end{aligned} \right.$$

$$\text{درصد تغییرات غلظت} = \frac{\text{غلظت اولیه} - \text{غلظت ثانویه}}{\text{غلظت اولیه}} \times 100 = \frac{40 - 32}{40} \times 100 = 20\% \downarrow \text{کاهش}$$

گام ۳ محاسبه انحلال پذیری در دمای ۱۰۰ °C:

در ۴۸ گرم محلول سیرشده در این دما، ۸ گرم نمک و در نتیجه ۴۰ گرم آب وجود دارد؛ بنابراین انحلال پذیری لیتیم سولفات در این دما برابر است با:

$$\text{نمک } 20 \text{ g} = \frac{\text{نمک } 8 \text{ g}}{\text{آب } 40 \text{ g}} \times \text{آب } 100 \text{ g}$$

گام ۴ معادله انحلال پذیری را به دست می آوریم:

$$(S_p = 20, S_s = 35) (S_p = 100, S_s = 20)$$

$$S - S_1 = \frac{S_p - S_1}{S_p - S_1} (S - S_1) \Rightarrow S - 35 = \frac{20 - 35}{100 - 35} (S - 20) \Rightarrow S = -0.15\theta + 35$$

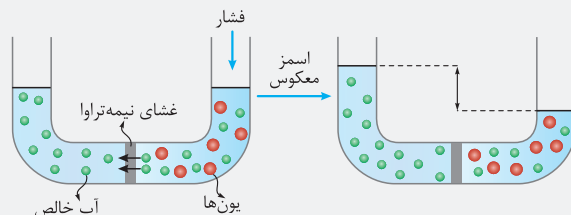
۸۳- گزینه ۳

درس نامه اسمز وارونه (معکوس):

خواندیم که در فرایند اسمز، مولکول های آب به طور خودبه خودی از محلول رقیق تر وارد محلول غلیظ تر می شوند. در فرایندی به نام اسمز معکوس، همان طور که از اسمش معلوم، اتفاقی برخلاف فرایند اسمز رخ می دهد؛ یعنی آب از محلول غلیظ تر وارد محلول رقیق تر می شود. از اون جایی که این فرایند برخلاف قاعده کلی و طبیعی است، باید زور بالا سرش باشه! به عبارت دیگر اسمز معکوس با اعمال فشار انجام خواهد شد.

فرایندی غیرخودبه خودی است که طی آن با اعمال فشار بر سطح اسمز معکوس ← محلول غلیظ تر، مولکول های آب برخلاف روند طبیعی (فرایند اسمز) از محلول غلیظ تر وارد محلول رقیق تر می شوند.

مثال: اگر حجم های برابری از آب خالص و آب نمک با یک غشای نیمه تراوا از هم جدا شده باشند، با اعمال فشار بر محلول آب نمک، مولکول های آب از محلول آب نمک به سمت آب خالص رفته و حجم آب خالص افزایش می یابد. واضح و مبرهن است که با جابه جایی مولکول های آب، محلول غلیظ اولیه به مرور غلیظ تر می شود.



عبارت های (ج) و (د) درست اند.

بررسی عبارت ها: (الف) با وارد کردن فشار بر محلول ستون (۱)، فرایند اسمز معکوس رخ می دهد و آب از طریق غشای نیمه تراوا، از سمت راست (محلول آب نمک) به سمت چپ (آب مقطر) جابه جا می شود؛ بنابراین شمار یون ها در محلول ستون (۱) ثابت باقی مانده و هیچ تغییری نمی کند. (دقت کنید که طی این عمل، با کاهش شمار مولکول های آب در ستون (۱) غلظت محلول آب نمک در این ستون افزایش می یابد ولی شمار یون ها تغییری نمی کند.) (ب) گفتیم که با اعمال فشار بر محلول ستون (۱)، هیچ کدام از یون های Na^+ و Cl^- از غشای نیمه تراوا عبور نمی کنند و تنها مولکول های آب از محلول آب نمک به سمت آب مقطر (از سمت محلول غلیظ تر به سمت محلول رقیق تر) با عبور از غشای نیمه تراوا جابه جا می شوند. (ج) پس از عبور مولکول های آب از غشای نیمه تراوا به سمت آب مقطر در ستون (۲)، محلول ستون (۱) غلیظ تر شده و مقدار آب در ستون (۲) افزایش می یابد.

(د) با برداشتن غشای نیمه تراوا و مخلوط شدن آب مقطر با محلول آب نمک، شمار مول های حل شونده (NaCl) تغییر نکرده و تنها حجم محلول آب نمک نسبت به حالت اولیه در ستون (۱)، ۲ برابر می شود:

$$\frac{\text{مول NaCl}}{\text{حجم محلول (L)}} = \text{غلظت مولی محلول پس از برداشتن غشای نیمه تراوا}$$

$$= \frac{0.1 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times 200 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}}{(200 + 200) \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}} = \frac{0.02 \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = 0.05 \text{ mol.L}^{-1}$$

تیز بازی عبارت (الف) تابلوه که نادرسته! پس ۱ و ۲ پُر! عبارت (ج) در ۳ و ۴ مشترک؛ بنابراین فقط کافی که یکی از عبارت های (ب) یا (د) رو بررسی کنی و تمام!

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{100}{H_2S} = \frac{34}{NO} \Rightarrow \frac{100}{34} = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 70.6\%$$

$$\Rightarrow x = 0.1 \times \frac{3}{4} \times 100 = 7.5\%$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

نکته در مسائلی که بازده درصدی واکنش جزء اطلاعات سؤال است، به جای استفاده از فرمول بازده، می‌توان از کسر تبدیل معادل آن استفاده کرده و مقدار عملی و نظری را به یکدیگر تبدیل کنیم. مثلاً می‌توان نوشت:

$$\frac{a \text{ g عملی}}{100 \text{ g نظری}} = \frac{100 \text{ g نظری}}{a \text{ g عملی}} \Rightarrow a = \text{بازده درصدی}$$

$$\frac{10/2 \text{ g H}_2\text{S} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{S}}{34 \text{ g H}_2\text{S}} \times \frac{2 \text{ mol NO}}{3 \text{ mol H}_2\text{S}}}{\frac{24 \text{ L NO نظری}}{1 \text{ mol NO}} \times \frac{75 \text{ L NO عملی}}{100 \text{ L NO نظری}}} = 3/6 \text{ L NO}$$

کسر مربوط به بازده درصدی

۸۸ - گزینه ۳

گام ۱ ابتدا از طریق جرم مولی و فرمول عمومی آلکان‌ها، شمار اتم‌های کربن آلکان مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$C_n H_{2n+2} \Rightarrow 12n + 2n + 2 = 14n + 2 \Rightarrow 14n + 2 = 114 \Rightarrow 14n = 112 \Rightarrow n = 8$$

آلکان مورد نظر ۸ کربنه است (اوکتان) $\Rightarrow$

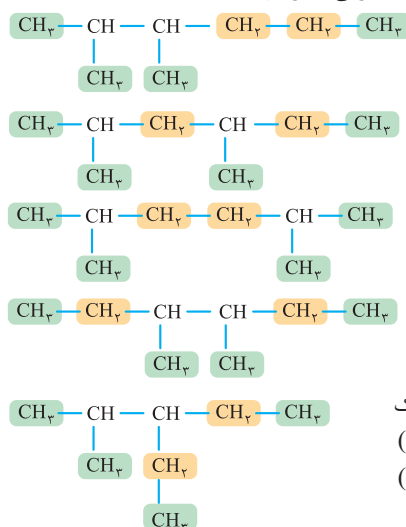
گام ۲ باید ایزومرهای از اوکتان را انتخاب کنیم که در ساختار آن‌ها نسبت شمار گروه‌های CH_3 به CH_2 برابر ۲ باشد. تنها حالت ممکن این است که در ساختارها، ۴ گروه CH_3 و ۲ گروه CH_2 داشته باشیم (یعنی حالت (۲)).

$$\frac{\text{شمار گروه‌های } CH_3}{\text{شمار گروه‌های } CH_2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} (1) \text{ } CH_3 = 10, \text{ } CH_2 = 2 \\ (2) \text{ } CH_3 = 4, \text{ } CH_2 = 2 \\ (3) \text{ } CH_3 = 6, \text{ } CH_2 = 3 \end{cases}$$

می‌دانیم که در ساختار آلکان‌ها، گروه‌های CH_3 ، ابتدا و انتهای زنجیر اصلی کربنی و انتهای شاخه‌های فرعی قرار دارند؛ بنابراین حالت (۱) برای آلکان ۸ کربنه ممکن نیست، زیرا در این حالت، آلکان شاخه فرعی ندارد و با یک گروه CH_3 فقط می‌تواند پروپان باشد.

حالت (۳) هم برای آلکان ۸ کربنه ممکن نیست زیرا شمار اتم‌های کربن آن بیشتر از ۸ کربن می‌شود.

گام ۳ ایزومرهای اوکتان با ۴ گروه CH_3 و ۲ گروه CH_2 را رسم می‌کنیم. ابتدا ساختارهایی را رسم می‌کنیم که دو شاخه فرعی متیل (CH_3) داشته باشند.



حالا ساختارهایی را رسم می‌کنیم که یک شاخه فرعی اتیل (CH_3-CH_2) و یک شاخه فرعی متیل (CH_3) داشته باشند:

بنابراین ۵ فرمول ساختاری متفاوت می‌توان داشت.

تیزبازی در یک محلول برای یک حل‌شونده معین، هر درصد تغییری در غلظت مول بر لیتر دقیقاً همان درصد تغییر را در غلظت گرم بر لیتر ایجاد می‌کند. پس در این‌جا نیاز به محاسبه قسمت دوم سؤال نبود و جواب می‌شد همون ۲۰ درصد!

(غلظت مول بر لیتر: C_M و غلظت گرم بر لیتر: C)، $\left(\frac{\text{تغییر غلظت}}{\text{غلظت اولیه}} \right) = \left(\frac{\text{درصد تغییرات}}{\text{غلظت}} \right) \times 100$

$$\Rightarrow \frac{\Delta C}{C_1} \times 100 = \frac{\Delta C_M}{C_{M_1}} \times 100 \Rightarrow \frac{\Delta C}{C_1} = \frac{\Delta C_M}{C_{M_1}}$$

درصد تغییر در غلظت گرم بر لیتر

$$\frac{\Delta C}{C_1} \times 100 = \frac{\Delta C}{C_1} \times 100$$

درصد تغییر در غلظت گرم بر لیتر

۸۶ - گزینه ۳

درس‌نامه

در یک گروه از بالا به پایین	در یک دوره از چپ به راست
شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.	شعاع اتمی عنصرها کاهش می‌یابد.
خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.	خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.
خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.	خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.

در هر گروه از جدول تناوبی با افزایش عدد اتمی (از بالا به پایین)، شعاع اتمی بزرگ‌تر می‌شود؛ بنابراین تمایل اتم به جذب الکترون و خصلت نافلزی، کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ در هر دوره با کاهش عدد اتمی (از راست به چپ)، به دلیل افزایش شعاع اتمی، خصلت فلزی نیز افزایش می‌یابد.

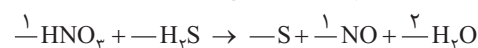
۲ در هر گروه با کاهش عدد اتمی (از پایین به بالا)، شعاع اتمی کوچک‌تر می‌شود و خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری یک نافلز، افزایش می‌یابد.

۴ در یک دوره از سمت راست به چپ با کاهش عدد اتمی و افزایش شعاع اتمی، خصلت نافلزی و واکنش‌پذیری نافلزها کاهش یافته و خصلت فلزی و واکنش‌پذیری فلزهای یک دوره، افزایش می‌یابد.

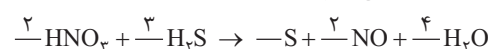
در ضمن می‌دانیم که تعداد الکترون‌های ظرفیت عناصر اصلی جدول (عناصر دسته‌های S و P) برابر با یکان شماره گروه آن‌ها در جدول تناوبی (۱ و ۲ و ۱۳ تا ۱۸) است؛ بنابراین می‌توان گفت بدون در نظر گرفتن گاز نجیب در هر دوره، با کاهش عدد اتمی و کاهش شماره گروه عنصرها، شمار الکترون‌های ظرفیت آن‌ها کاهش می‌یابد.

۸۷ - گزینه ۲

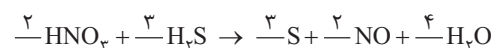
گام ۱ ابتدا باید معادله واکنش را موازنه کنیم. موازنه واکنش را با اتم N از ترکیب پیچیده‌تر HNO_3 شروع می‌کنیم. برای موازنه اتم N به HNO_3 و NO ضریب ۱ می‌دهیم و در ادامه برای موازنه اتم O، به H_2O ضریب ۲ می‌دهیم.



حالا به منظور موازنه اتم H، باید به H_2S ضریب $\frac{3}{2}$ بدهیم. برای از بین رفتن ضریب کسری، همه ضرایب معلوم را در ۲ ضرب می‌کنیم.



و در نهایت برای موازنه اتم S، به S ضریب ۳ می‌دهیم.



گام ۲ حالا می‌ریم سراغ استوکیومتری واکنش و با استفاده از اطلاعات سؤال، حجم گاز NO را به دست می‌آوریم:

روش استفاده از کسر تناسب: در این روش، بازده درصدی در کسر مربوط به واکنش‌دهنده ضرب می‌شود.

گام ۱ به کمک حجم گاز H_2 مصرفی باید حساب کنیم که در 5° دقیقه، چند مول آب تشکیل می‌شود:

$$\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{مول}}{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow \frac{11 \times 2}{7 \times 22 \times 4} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{7} \text{ mol H}_2\text{O}$$

گام ۲ مول آب در 30° ثانیه (دقیقه) تولید می‌شود. با توجه به ثابت در نظر گرفتن سرعت واکنش، حالا حساب می‌کنیم که 4° مول آب در چند ثانیه تشکیل می‌شود.

$$\text{ثانیه } 42 = \frac{30^\circ \times 4^\circ \text{ mol H}_2\text{O}}{2^\circ \text{ mol H}_2\text{O}}$$

۹۲- گزینه ۳

نکته برای محاسبه ΔH یک واکنش با استفاده از آنتالپی‌های سوختن واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش‌دهنده‌ها} \right]$$

گام ۱ اول از همه، باید ببینیم که بر اثر سوختن ۱ مول متانول (CH_3OH) چه مقدار گرما آزاد می‌شود؛ یعنی آنتالپی سوختن متانول چه قدره!

$$1 \text{ mol CH}_3\text{OH} \times \frac{-144 \text{ kJ}}{2^\circ \text{ mol CH}_3\text{OH}} = -72^\circ \text{ kJ}$$

گام ۲ با استفاده از اطلاعات داده‌شده در سؤال، آنتالپی سوختن پروپین (C_3H_4) را به کمک آنتالپی سوختن متانول (CH_3OH) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_4)}{\Delta H_{\text{سوختن}}(CH_3OH)} = 2/7 \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_4) = 2/7 \times (-72^\circ) = -1944 \text{ kJ}$$

گام ۳ آنتالپی واکنش: $C_3H_4(g) + 2H_2(g) \rightarrow C_3H_8(g)$ ، برابر با -282 kJ است، از طرفی آنتالپی سوختن هیدروژن (H_2) و آنتالپی سوختن پروپین (C_3H_4) را داریم. حالا به راحتی به کمک رابطه زیر، آنتالپی سوختن پروپان (C_3H_8) را حساب می‌کنیم:

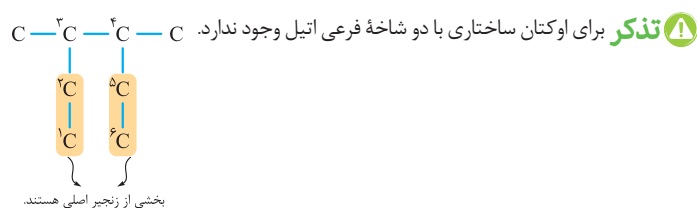
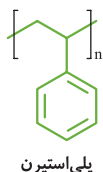
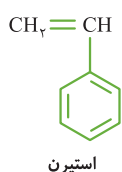
$$\begin{aligned} \Delta H_{\text{واکنش}} &= \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش‌دهنده‌ها} \right] \\ \Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} &= [\Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_8)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_4) + 2\Delta H_{\text{سوختن}}(H_2)] \\ \Rightarrow -282 &= [-1944 + 2(-286)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_8)] \\ \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(C_3H_8) &= -2234 \text{ kJ.mol}^{-1} \end{aligned}$$

۹۳- گزینه ۳

لوله‌های پلاستیکی از پلی‌اتن سنگین ساخته می‌شود. چگالی هر دو پلی‌اتن سنگین و سبک، از چگالی آب (حدود 1 g.cm^{-3}) کم‌تر است و روی آب شناور می‌مانند. (چگالی پلی‌اتن سبک و سنگین به ترتیب حدود 92° و 97° گرم بر سانتی‌متر مکعب است.)

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) این مورد لزوماً برای همه پلیمرها درست نیست و تنها برای پلیمرهای آلکنی درست است. برای مثال در پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، دو نوع مونومر (دی‌اسید و دی‌الکل) و (دی‌اسید و دی‌آمین) در تشکیل پلیمر شرکت می‌کنند؛ بنابراین جرم مولی واحد تکرار شونده این پلیمرها با جرم مولی مونومرها برابر نیست. علاوه بر آن جرم مولی واحد تکرار شونده در پلی‌استرها یا پلی‌آمیدها به دلیل خروج آب (H_2O) هنگام تشکیل آن‌ها، حتی با مجموع جرم مولی مونومرهای سازنده آن‌ها هم برابر نمی‌باشد.

۲) کی گفته‌اند؟! مثلاً دی‌اسید یا دی‌الکل سازنده یک پلی‌استر (واکنش‌دهنده‌ها در فرایند بسپارش) می‌توانند سیر شده بوده و فاقد پیوندهای $C=C$ یا $C \equiv C$ باشند یا در فرایند بسپارش پلیمری مانند پلی‌استیرن، هم مونومر و هم پلیمر سیر نشده و دارای پیوند $C=C$ باشند.



۸۹- گزینه ۴

برای هر ماده، نسبت ظرفیت گرمایی (C) به ظرفیت گرمایی ویژه (c) برابر با جرم ماده (m) است.

$$m = \frac{\text{ظرفیت گرمایی } (C)}{\text{ظرفیت گرمایی ویژه } (c)} \Rightarrow m \times \text{ظرفیت گرمایی ویژه } (c) = \text{ظرفیت گرمایی } (C)$$

با توجه به این که طراح محترم فرموده است که جرم دو مایع برابر می‌باشد، پس این نسبت در دو مایع M و X ، برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) با توجه به رابطه گرمای ویژه ($c = \frac{Q}{m\Delta\theta}$) داریم:

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X}$$

$$\frac{Q_M = Q_X}{m_M = m_X} \rightarrow 2\Delta\theta_M = \Delta\theta_X \Rightarrow \Delta\theta_M = \frac{\Delta\theta_X}{2}$$

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X}$$

$$\frac{\Delta\theta_X = 2\Delta\theta_M}{m_M = m_X} \rightarrow \frac{Q_M}{\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{\Delta\theta_X} \Rightarrow Q_M = \frac{Q_X}{2}$$

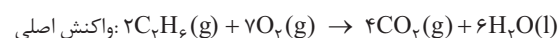
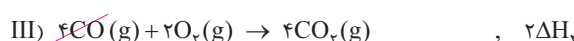
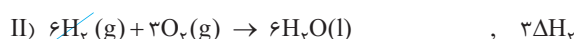
۳) در این گزینه طراح محترم یک سوتی کوچک داده! به جای برابر بودن دما باید می‌گفت تغییر دمای ($\Delta\theta$) برابر! با فرض تغییر دمای برابر، این گزینه هم درسته!

$$c_M = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_M}{m_M\Delta\theta_M} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X} \xrightarrow{\frac{\Delta\theta_M = \Delta\theta_X}{m_M = m_X}} Q_M = 2Q_X$$

۹۰- گزینه ۳

گام ۱ باید به کمک قانون هس، ΔH واکنش:

$2C_2H_6(g) + 7O_2(g) \rightarrow 4CO_2(g) + 6H_2O(l)$ را به دست آوریم. برای رسیدن به واکنش اصلی، واکنش (I) را در ۲ ضرب کرده (به خاطر $2C_2H_6$)، واکنش (II) را در ۳ ضرب کرده (به خاطر $6H_2O$) و واکنش (III) را در ۲ ضرب می‌کنیم (به خاطر $4CO_2$).



$$\Delta H = 2\Delta H_1 + 3\Delta H_2 + 2\Delta H_3$$

$$= 2(-137) + 3(-578) + 2(-566) = -3140 \text{ kJ}$$

گام ۲ خب! فهمیدیم که به ازای مصرف ۲ مول اتان، 3140 kJ گرما آزاد می‌شود؛ حالا گرمای آزاد شده به ازای مصرف ۳ گرم اتان (C_2H_6) را می‌حسابیم.

روش استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{Q}{|\Delta H|} \Rightarrow \frac{3}{2 \times 30} = \frac{Q}{3140} \Rightarrow Q = 157 \text{ kJ}$$

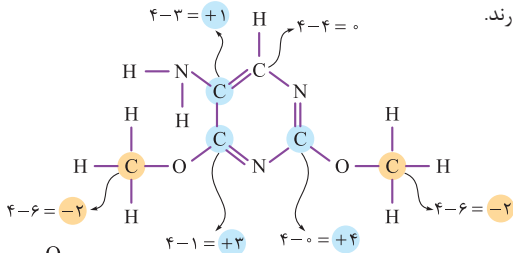
روش استفاده از کسر تبدیل: $3 \text{ g C}_2\text{H}_6 \times \frac{1 \text{ mol C}_2\text{H}_6}{30 \text{ g C}_2\text{H}_6} \times \frac{3140 \text{ kJ}}{2 \text{ mol C}_2\text{H}_6} = 157 \text{ kJ}$

۹۱- گزینه ۲

گام ۱ ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



در ترکیب داده شده، ۳ اتم کربن عدد اکسایش مثبت (۱، ۳، ۴) و دو اتم کربن عدد اکسایش منفی (۲-) دارند.



بررسی سایر گزینه ها: ۱) ترکیب داده شده دارای گروه عاملی آمیدی (C-N) نیست.

۲) از ۶ اتم کربن موجود در ساختار ترکیب داده شده، ۴ اتم کربن با اتم اکسیژن پیوند دارند.

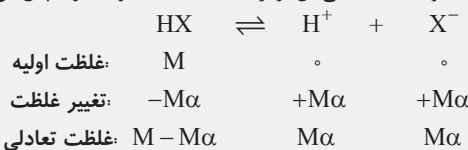
$$\left(\frac{4}{6} \times 100 = \frac{2}{3} \times 100 > 50\right)$$

۳) با توجه به ساختار، در این ترکیب ۱۷ پیوند یگانه و ۳ اتم نیتروژن وجود دارد. $\left(\frac{17}{3} \neq 5\right)$

۹۵- گزینه ۲

درس نامه رابطه ثابت یونش و درجه یونش:

اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، اسید به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می توان نوشت:



$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{X}^-]}{[\text{HX}]} = \frac{(M\alpha)(M\alpha)}{M - M\alpha} = \frac{M^2\alpha^2}{M(1 - \alpha)} = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha}, \quad K_a = \frac{[\text{H}^+]^2}{M - [\text{H}^+]}$$

برای اسیدهای خیلی ضعیف (معمولاً با K_a کوچک تر از 10^{-5}) و یا مقادیر کم α (معمولاً کمتر از ۰/۵)، می توان در عبارت « $1 - \alpha$ » از α صرف نظر کرده و از رابطه تقریبی روبه رو استفاده کرد:

۱) غلظت مولی محلول اولیه اسید HA را (قبل از اضافه شدن آب به آن) از طریق رابطه ثابت یونش و درجه یونش به دست می آوریم (دقت کنید که در این سؤال نمی توان از روابط تقریبی استفاده کرد، زیرا درجه یونش و ثابت یونش اسید، عددهای کوچکی نیستند).

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha} \Rightarrow 10^{-3} = \frac{M \times (0/1)^2}{1 - 0/1} \Rightarrow M = 0/09 \text{ mol.L}^{-1}$$

۲) با رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف، درجه یونش اسید افزایش می یابد (در این مسئله دو برابر شده است) اما ثابت یونش اسید (K_a) تنها به دما وابسته است و با رقیق شدن اسید تغییری نمی کند؛ بنابراین غلظت مولی اسید را پس از افزودن آب حساب می کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1 - \alpha} \Rightarrow 10^{-3} = \frac{M \times (0/2)^2}{1 - 0/2} \Rightarrow M = 0/02 \text{ mol.L}^{-1}$$

۳) حالا از فرمول معروف رقیق سازی استفاده می کنیم:

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow 0/09 \times 250 = 0/02 \times V_2 \Rightarrow V_2 = 1125 \text{ mL}$$

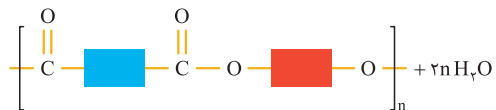
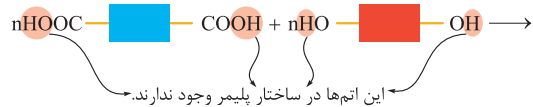
رقیق (نهایی) غلیظ (اولیه)

$$V_{\text{آب}} = V_2 - V_1 = 1125 - 250 = 875 \text{ mL}$$

۴) دقت کنید که K_a اسید HA، عدد کوچکی نیست (بزرگ تر از 10^{-5} است) و نمی توان در مخرج کسرهای α در مقابل ۱ صرف نظر کرد! اگر به اشتباه از α در مخرج کسرهای صرف نظر می کردی، جواب نهایی می شد ۷۵ میلی لیتر که از قضا تو گزینه ها هم هست!

مشاوره این سؤال ممکنه کسایی رو که به فرمول رو بدون توجه به مفاهیم اون، حفظ می کنن، گیر بندازه! تو مسائل ثابت یونش اسیدها، باید حتماً مواظبتون به مقدار K_a و این که آیا می شه از روابط تقریبی استفاده کرد یا خیر، باشه!

این مورد هم لزوماً برای همه پلیمرها درست نیست. مثلاً در واکنش تهیه پلی استرها از دی الکل ها و دی اسیدها، H از الکل و OH از اسید به صورت H_2O جدا شده و در ساختار پلی استر حاصل وجود ندارند. (یکی از اتم های O گروه های اسیدی در ساختار پلی استر وجود ندارد.)



۹۴- گزینه ۴

درس نامه همه گروه های عاملی که در کتاب شیمی ۲ می خونین! رو در جدول زیر

برآتون آوردیم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی
۱- آلدهیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{H} \end{array}$ آلدهیدی	۲- کتون ها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}- \end{array}$ کربونیل
۳- الکل ها	$-\text{OH}$ هیدروکسیل	۴- اترها	$-\text{O}-$ اتری
۵- کربوکسیلیک اسیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{OH} \end{array}$ کربوکسیل	۶- استرها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{O}- \end{array}$ استری
۷- آمین ها	$\begin{array}{c} \text{R}-\text{N}-\text{R}'' \\ \\ \text{R}' \end{array}$ آمینی، حداقل یکی از گروه های R، R' و R'' گروه هیدروکربنی اند.	۸- آمیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ -\text{C}-\text{N}- \end{array}$ آمیدی

درس نامه تعیین عدد اکسایش به روش رسم ساختار لوویس:

برای تعیین عدد اکسایش اتم ها، در مواد مولکولی یا یون های چنداتمی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\text{عدد اکسایش اتم} = \left(\text{شمار الکترون های نسبت داده شده به اتم} \right) - \left(\text{شمار الکترون های ظرفیت اتم} \right)$$

برای تعیین شمار الکترون های نسبت داده شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونه مورد نظر، به صورت زیر عمل می کنیم:

۱) به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می دهیم.

۲) به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خلصت

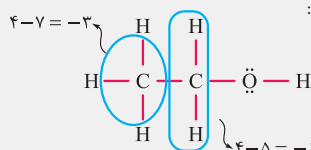
نافلزی بیشتر، نسبت می دهیم.

توجه: مقایسه خلصت نافلزی چند عنصر زیر را بلد باشیم:

خلصت نافلزی: $F > O > N > Cl > Br > I > S > C > H$

۳) همه الکترون های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می دهیم.

مثال: محاسبه عدد اکسایش اتم های کربن در اتانول:



عبارت درست می‌شود). در ضمن زمان رسیدن به تعادل، به سینتیک و سرعت واکنش‌های تعادلی بستگی دارد و ربطی به K_b یا قوی بودن باز ندارد! در یک واکنش برگشت‌پذیر، پس از برابری سرعت واکنش‌های رفت و برگشت، تعادل برقرار می‌شود. حالا اگر در این واکنش تعادلی، مقدار K بزرگ باشد، میزان پیشرفت واکنش زیاد است و مقدار قابل توجهی از واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها تبدیل می‌شوند.

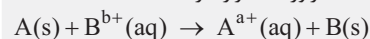
۹۸- گزینه‌ها

درس‌نامه ۱ برای محاسبه ولتاژ یک سلول گالوانی، که به نیروی الکتروموتوری (emf) هم معروف است، باید E° آند را از E° کاتد کم کنیم:

$$emf = E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{(کاتد)}} - E^\circ_{\text{(آند)}} = E^\circ_{\text{(بزرگ‌تر)}} - E^\circ_{\text{(کوچک‌تر)}}$$

۲ در یک واکنش اکسایش - کاهش، به گونه‌ای که اکسایش می‌یابد، کاهنده و به گونه‌ای که کاهش می‌یابد، اکسنده می‌گویند.

۳ در واکنش‌هایی که به طور طبیعی انجام می‌شوند، قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلز که در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار دارند، به ترتیب بیشتر از قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلزی است که در سمت فراورده‌ها قرار دارند.



$$\Rightarrow B^{b+} > A^{a+} \text{ قدرت اکسندگی، } A > B \text{ قدرت کاهندگی}$$

۴ اگر قدرت کاهندگی فلز A از B بیشتر باشد (E° فلز A کم‌تر باشد)، فلز A می‌تواند با نمک‌های فلز B به طور طبیعی واکنش دهد.

ابتدا باید با توجه به اطلاعات داده‌شده بفهمیم که پتانسیل کاهشی X و Y ، مثبت هستند یا منفی! می‌دانیم که در سلول‌های گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی $Y - SHE$ ، کاتد است و در سری الکتروشیمیایی بالاتر از هیدروژن قرار دارد؛ پس $E^\circ(Y^{2+}/Y) = +0.34V$ آن مثبت است.

از طرفی محلول نمک یا کاتیون یک فلز را می‌توان در ظرفی از جنس فلز بالاتر در سری الکتروشیمیایی نگاه‌داری کرد؛ بنابراین فلز Y با X^{2+} واکنش نمی‌دهد و X در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Y قرار داشته و پتانسیل کاهشی X از Y کم‌تر است. با توجه به مقادیر عددی پتانسیل‌های کاهشی، E° مربوط به X منفی می‌شود:

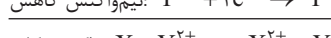
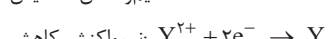
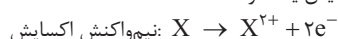
$$E^\circ(X^{2+}/X) < E^\circ(Y^{2+}/Y) \Rightarrow E^\circ(X^{2+}/X) = -0.4V$$

فلاصه این‌که در سلول گالوانی حاصل از X و Y ، کاتد X آند است:

$$emf(X - Y) = E^\circ(Y^{2+}/Y) - E^\circ(X^{2+}/X)$$

$$\Rightarrow emf(X - Y) = 0.34 - (-0.4) = 0.74V$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲ با انجام کامل واکنش، ۲ مول الکترون بین هر اتم X و Y مبادله می‌شود. همچنین در این واکنش X اکسایش یافته و کاهنده است.



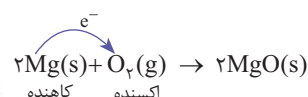
۳ جهت جریان الکتریکی در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد است؛ بنابراین در سلول $X - Y$ ، الکترون‌ها از X (آند) به سمت Y (کاتد) حرکت می‌کنند.

۴ هر چه E° یک نیم‌واکنش بزرگ‌تر باشد، گونه سمت چپ آن اکسنده قوی‌تری است؛ بنابراین در این‌جا قدرت اکسندگی Y^{2+} از X^{2+} بیشتر است.

مشاوره این تست مشابه خیلی از تست‌های کنکور سراسری، دقیقاً شبیه‌ساز خود تمرین‌های کتاب درسیه! پس اگر نتوانستی این تست رو حل کنی، برگرد و دوباره تمرین‌های کتاب رو حل کن که اتمالت زبانه تو کنکور، مستقیم از همین‌جا تست بیاد.

۹۹- گزینه‌ها

در واکنش سوختن متیزیم در اکسیژن، متیزیم (Mg) الکترون از دست داده و اکسایش می‌یابد؛ پس کاهنده است.

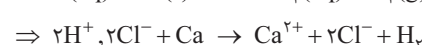


۹۶- گزینه‌ها

شفاف‌سازی پس از واکنش $1/2$ گرم فلز Ca با 2 لیتر محلول HCl ، pH محلول نهایی برابر $1/7$ شده است. اگر مقدار اسید به اندازه مقدار استوکیومتری در واکنش برای مصرف کامل $1/2$ گرم فلز Ca بود، pH محلول نهایی برابر 7 می‌شد، الان که pH محلول نهایی کم‌تر از 7 است؛ یعنی مقدار اسید بیشتر از مقدار استوکیومتری آن در واکنش است.



گام ۱ با توجه به معادله واکنش، می‌توان دریافت که یون کلرید در این واکنش یون ناظر یا تماشاچی است و در واکنش مصرف یا تولید نمی‌شود؛ بنابراین غلظت مولی یون کلرید در محلول ثابت بوده و برابر با غلظت اولیه HCl است.



یون ناظر

مصرفی $[HCl] +$ باقی‌مانده $[HCl] = [Cl^-]$ در محلول

با استفاده از pH محلول نهایی، می‌توان غلظت H^+ و غلظت HCl باقی‌مانده در محلول پس از انجام واکنش را به دست آورد. با استفاده از جرم کلسیم هم می‌توان از طریق استوکیومتری واکنش، مول مصرفی و در نهایت غلظت HCl مصرفی را به دست آورد.

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1/7} = 10^{-2} \times 10^{1/7}$$

$$\log 2 = 0.3 \rightarrow 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} = [HCl] \text{ باقی‌مانده}$$

محاسبه $[HCl]$ مصرفی:

$$1/2 \text{ g Ca} \times \frac{1 \text{ mol Ca}}{40 \text{ g Ca}} \times \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Ca}} \times \frac{1}{2 \text{ L محلول}} = 0.03 \text{ mol.L}^{-1} = [HCl] \text{ مصرفی}$$

مصرفی $[HCl] +$ باقی‌مانده $[HCl] = [Cl^-]$ در محلول

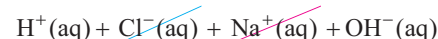
$$= 0.02 + 0.03 = 0.05 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۲ برای قسمت دوم سؤال می‌تونیم خیلی راحت از طریق استوکیومتری واکنش جرم گاز H_2 تولیدی رو از جرم $1/2$ گرم Ca مصرف‌شده به دست بیاریم:

$$1/2 \text{ g Ca} \times \frac{1 \text{ mol Ca}}{40 \text{ g Ca}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{1 \text{ mol Ca}} \times \frac{2 \text{ g H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 0.06 \text{ g H}_2$$

۹۷- گزینه‌ها

در واکنش‌های اسید - باز، یون‌های H^+ و OH^- با هم واکنش می‌دهند و آب تولید می‌شود. در واکنش $HCl(aq)$ و $NaOH(aq)$ ، یون‌های $Na^+(aq)$ و $Cl^-(aq)$ دست‌نخورده باقی می‌مانند و در واقع یون ناظر یا تماشاچی تشریف دارند!



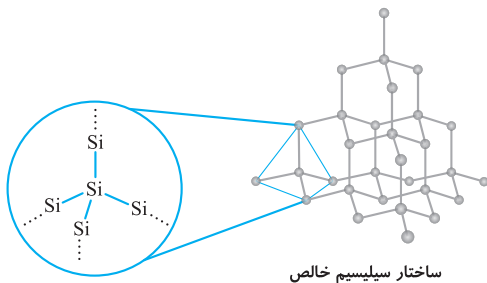
بررسی سایر گزینه‌ها: ۲ غلظت H^+ و pH یک محلول اسیدی علاوه بر درجه یونش اسیدی (α) به غلظت اسید (M) نیز بستگی دارد ($[H^+] = M\alpha$)؛ بنابراین بدون اطلاع از غلظت این دو اسید، نمی‌توان در مورد pH آن‌ها اظهار نظر کرد!

۳ فرض می‌کنیم pH محلول‌های DOH و AOH به ترتیب برابر با 10 و 9 باشد:

$$\left. \begin{array}{l} DOH: pH = 10 \rightarrow [H^+] = 10^{-10} \\ AOH: pH = 9 \rightarrow [H^+] = 10^{-9} \end{array} \right\} \begin{array}{l} [OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-10}} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-4} \\ [OH^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-9}} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-5} \end{array}$$

۴ درسته که هر چه یک باز قوی‌تر باشد، مقدار عددی K_b آن نیز بزرگ‌تر است اما شمار یون‌های حاصل از یونش، علاوه بر ثابت یونش به غلظت اولیه باز نیز بستگی دارد؛ بنابراین درباره شمار یون‌های آن، نمی‌توان اظهار نظر کرد (اگر گفته می‌شد که در غلظت یکسان، هر چه مقدار K_b برای یک باز بیشتر باشد، شمار یون‌ها در محلول آن بیشتر است، این بخش

۴- سیلیسیم خالص (Si) یک جامد کووالانسی سه بعدی است؛ یعنی اتم‌های Si در این شبکه، در یک صفحه قرار نمی‌گیرند.



۱۰۲- گزینه ۱

با جایگزین کردن اتم گوگرد در مولکول کربونیل سولفید (CSO) با اکسیژن، مولکول کربن دی‌اکسید (CO₂) حاصل می‌شود. بهتر است مقایسه‌های کلی زیر را در مورد این دو مولکول بلد باشیم:

ویژگی	مولکول	کربونیل سولفید (CSO)	کربن دی‌اکسید (CO ₂)
ساختار لوویس	$\delta^- \ddot{O} = C = \ddot{O} \delta^-$	$\delta^+ \ddot{S} = C = \ddot{O} \delta^-$	$\delta^- \ddot{O} = C = \ddot{O} \delta^-$
شکل مولکول	خطی	خطی	خطی
قطبی بودن	قطبی ($\mu > 0$)	ناقطبی ($\mu = 0$)	ناقطبی ($\mu = 0$)
جهت‌گیری در میدان الکتریکی	می‌کند	نمی‌کند	نمی‌کند

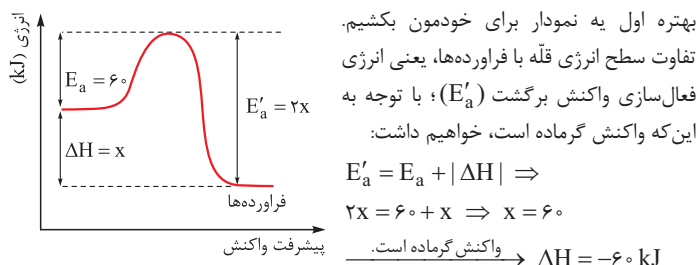
همان‌طور که می‌بینید، CSO یک مولکول قطبی با گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر ولی CO₂ یک مولکول ناقطبی با گشتاور دوقطبی برابر صفر است.

۳- بررسی سایر گزینه‌ها: ۲- بار جزئی اتم مرکزی در هر دو مولکول مثبت (δ^+) است.

۳- شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در هر دو یکسان است.

۴- نوع نیروی بین مولکولی در هر دو از نوع وان‌دروالسی است، ولی مولکول CSO قطبی بوده (و جرم مولی بیشتری هم دارد) و مولکول CO₂ ناقطبی است؛ بنابراین قدرت نیروهای جاذبه بین مولکولی در مولکول قطبی CSO بیشتر است.

۱۰۳- گزینه ۳



۱۰۴- گزینه ۴

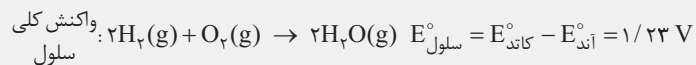
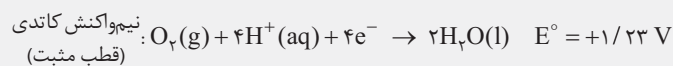
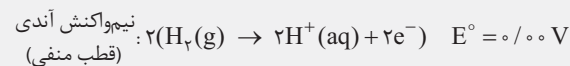
★ نکته اثر عوامل مختلف بر تعادل:

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل	چگونگی تغییر
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت مصرف آن ماده	تغییر نمی‌کند.
	کاهش غلظت یک ماده	جابه‌جایی در جهت تولید آن ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی بیشتر	تغییر نمی‌کند.
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	جابه‌جایی در جهت شمار مول‌های گازی کم‌تر	تغییر نمی‌کند.

۱۰۰- گزینه ۴

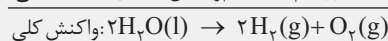
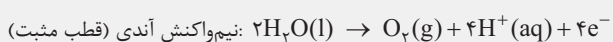
۱- سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن

نوعی سلول گالوانی است و به منظور تولید جریان برق در آن گاز هیدروژن به آرامی اکسید می‌شود.



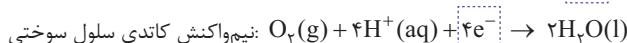
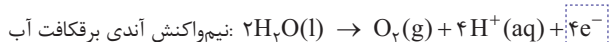
۲- سلول برقکافت آب

یک سلول الکترولیتی است که در آن، جریان برق از آب عبور داده می‌شود و طی آن آب به عناصر سازنده‌اش (H₂ و O₂) تجزیه می‌شود.

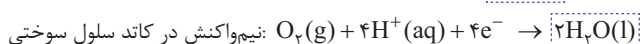
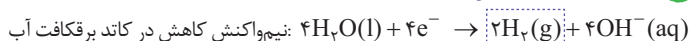


حجم گاز تولیدی ۱ مول در آند (+) حجم گاز تولیدی ۲ مول در کاتد (-)

شمار الکترون‌های هر دو نیم‌واکنش برابر است.

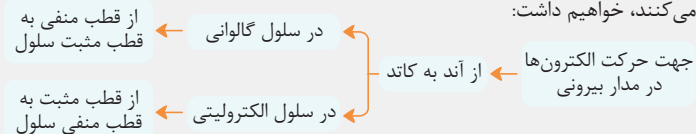


۳- بررسی سایر گزینه‌ها: ۱- کاملاً درست! ببینید:

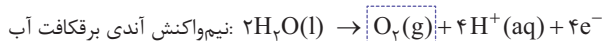


۲- سلول برقکافت آب، نوعی سلول الکترولیتی و سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، نوعی سلول گالوانی است. جهت حرکت الکترون‌ها در هر دو سلول مشابه و از آند به کاتد و در سلول سوختی از قطب منفی (آند) به قطب مثبت (کاتد) است.

★ نکته در هر دو سلول گالوانی و الکترولیتی، الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد جابه‌جا می‌شوند اما با توجه به این‌که قطب مثبت و منفی در این دو سلول با هم فرق می‌کنند، خواهیم داشت:



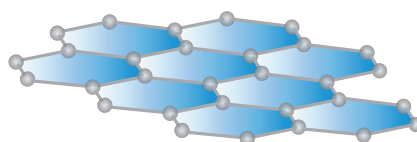
۳- فراورده‌های نیم‌واکنش آندی برقکافت آب، H⁺ و O₂ و گاز ورودی به آند در سلول سوختی، H₂ است. از واکنش O₂ و H₂، مولکول آب (H₂O) تشکیل می‌شود.



۱۰۱- گزینه ۲

چگالی گرافیت (۲/۲۷ g.cm^{-۳}) از چگالی آب (۱ g.cm^{-۳}) بیشتر است و تکه کوچکی از آن بر روی آب شناور نمی‌ماند.

۳- بررسی سایر گزینه‌ها: ۱- می‌دانیم که گرافن تک‌لایه‌ای از گرافیت است و ضخامت آن به اندازه یک اتم کربن است؛ بنابراین با داشتن شعاع اتم کربن می‌توان ضخامت گرافن را اندازه‌گیری کرد.



گرافن

۳- در ساختار جامدهای کووالانسی دوبعدی مانند هر صفحه گرافیت و جامد کووالانسی گرافن، اتم‌های کربن توسط پیوندهای اشتراکی در یک صفحه قرار گرفته‌اند.

۲ اگر واکنش گرماگیر باشد (یعنی حالت (۱))، با افزایش حجم ظرف (کاهش فشار)، تعادل در جهت مول گازی بیشتر یعنی واکنش رفت جابه‌جا می‌شود و درصد مولی فراورده‌ها (افزایش می‌یابد نه واکنش‌دهنده‌ها)!

۳ اگر با افزایش دما ثابت تعادل بزرگ شود، تعادل گرماگیر است (یعنی حالت (۱)). در این حالت با افزایش حجم ظرف (کاهش فشار)، تعادل در جهت مول گازی بیشتر یعنی واکنش رفت جابه‌جا می‌شود و سبب افزایش میزان پیشرفت واکنش می‌شود، نه کاهش میزان پیشرفت واکنش!



۱۰۵ - گزینه ۲

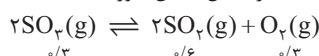
۱۰۵ با توجه به معادله واکنش خواهیم داشت:



تعداد مول آغازی	۰/۹	۰	۰
تغییر تعداد مول‌ها	-۲x	+۲x	+x
تعداد مول تعادلی	۰/۹ - ۲x	۲x	x

$$\frac{3x}{0.9 - 2x} = 3 \Rightarrow x = 0.9 - 2x \Rightarrow x = 0.3$$

پس در هنگام تعادل، تعداد مول‌های مواد شرکت‌کننده در تعادل به این صورت است:



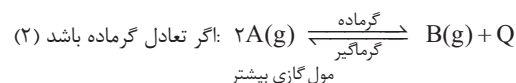
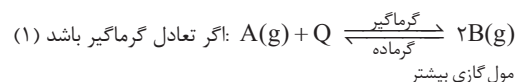
۱۰۵ حالا غلظت‌های تعادلی را در رابطه ثابت تعادل قرار می‌دهیم (حجم ظرف فراموش نشود):

$$K = \frac{[SO_2]^2 [O_2]}{[SO_3]^2} = \frac{(\frac{0.6}{2})^2 \times (\frac{0.3}{2})}{(\frac{0.3}{2})^2} = 0.6$$

۱۰۵ تله اگر حجم ظرف را در محاسبات در نظر نمی‌گرفتید، به عدد ۱/۲ و گزینه اشتباه می‌رسیدید.

عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل	چگونگی تغییر
واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.
واکنش‌های گرماگیر	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما	جابه‌جایی در جهت تولید گرما (جهت برگشت)	کاهش می‌یابد.
واکنش‌های گرماگیر	افزایش دما	جابه‌جایی در جهت مصرف گرما (جهت رفت)	افزایش می‌یابد.

طبق اطلاعات سؤال، در این واکنش تعادلی، با افزایش حجم و افزایش دما، تعادل به یک سمت جابه‌جا می‌شود. افزایش حجم (کاهش فشار) باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مول‌های گازی بیشتر می‌شود. افزایش دما، باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف گرما (واکنش گرماگیر) و افزایش مقدار ثابت تعادل (K) می‌شود؛ بنابراین در این تعادل، واکنش گرماگیر در جهت مول‌های گازی بیشتر است، یعنی به صورت نمادی می‌توان دو حالت زیر را نوشت:



اگر با افزایش دما، ثابت تعادل کوچک شود، واکنش گرماگیر است (یعنی حالت (۲)). در این حالت با کاهش حجم ظرف (افزایش فشار)، تعادل در جهت مول گازی کم‌تر یعنی واکنش رفت جابه‌جا شده و درصد مولی فراورده‌ها افزایش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱ اگر واکنش گرماگیر باشد (یعنی حالت (۲))، در این حالت شمار مول‌های واکنش‌دهنده‌ها بیشتر از فراورده‌هاست نه برعکس!

